

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

“ 23 ” мая

Регистрационный №



НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебная программа учреждения высшего образования

по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

2017 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования 1-31 03 01-2013 (30.08.2013 г.) и учебного плана № G31-140/уч. (30.05.2013 г.) для специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) (направление специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)).

СОСТАВИТЕЛИ:

Олег Леонидович Яблонский – доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа
(протокол № 11 от 27.04.2017)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета
Белорусского государственного университета
(протокол № 7 от 16.05.2017)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Возникновение и развитие математической статистики, как и других математических дисциплин, определялось потребностями практики. В настоящее время ее методы широко используются в различных физических и технических дисциплинах. Они играют важную роль в экономических исследованиях, биологии, медицине, геологии, психологии, социологических исследованиях и других, считавшихся далекими от математики, науках.

Математическая статистика рассматривается как прикладная математическая дисциплина, в которой наиболее плодотворными являются вероятностные методы. Она решает задачи, в каком-то смысле обратные задачам теории вероятностей, а именно, математическая статистика занимается построением математических моделей исследуемых случайных явлений.

Вероятностными идеями пронизано всё современное естествознание. Эти идеи стимулируют в наши дни развитие всего комплекса знаний, начиная от наук о неживой природе и заканчивая науками об обществе. Понятие вероятности лежит в основе математической дисциплины — теории вероятностей.

Предполагается, что к моменту изучения дисциплины цикла дисциплин специализаций «Некоторые элементы математической статистики» изучены следующие дисциплины: *Алгебра и теория чисел, Дискретная математика, Аналитическая геометрия, Математический анализ, Дифференциальные уравнения, Теория функций комплексного переменного, Функциональный анализ и интегральные уравнения, Теория вероятностей.*

Цель дисциплины «Некоторые элементы математической статистики»: — пополнить базу знаний и навыков у студентов в указанной области математики.

Задачи изучения дисциплины «Некоторые элементы математической статистики»: ознакомление студентов с основными принципами математической статистики и примерами их приложений, дальнейшее формирование у студентов навыков абстрактного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах, повышение их математической культуры.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- понятия математической статистики;
- математические модели случайных явлений;
- методы математической статистики;

уметь:

- использовать основные закономерности случайных явлений;
- применять методы математической статистики;

владеть:

- прикладными методами математической статистики.

Требования к академическим компетенциям специалиста

В результате изучения дисциплины специализации «Некоторые элементы математической статистики» студент должен обладать следующими

компетенциями:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным вырабатывать новые идеи.

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникаций.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию.

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

ПК-1. Разрабатывать практические рекомендации по использованию научных исследований, планировать и проводить экспериментальные исследования, исследовать патентоспособность и показатели технического уровня разработок программного обеспечения информационных систем.

ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию.

ПК-3. Применять методы теории вероятностей, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

ПК-4. Разрабатывать и тестировать информационные системы, осуществлять защиту приложений и данных.

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

ПК-6. Использовать и развивать современные информационные технологии и средства автоматизации управленческой деятельности.

ПК-7. Проводить исследования в области эффективности решения производственных задач.

ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой; приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

ПК-13. Составлять документацию (графики работ, инструкции, планы,

заявки, деловые письма и т.п.), а также отчетную документацию по установленным формам.

ПК-16. Разрабатывать и согласовывать представляемые материалы.

ПК-22. Осваивать и реализовывать управленческие инновации в сфере высоких технологий.

ПК-27. Разрабатывать новые информационные технологии на основе математического моделирования и оптимизации.

Учебная программа дисциплины специализации предназначена для студентов 4 курса (7 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины специализации отводится 128 часов, в том числе аудиторных занятий – 72 часа, из них лекционных – 44 часов, УСП – 28 часов. Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ (в обзорном порядке).

Тема 1.1. *Определение случайного процесса.* Процессы с дискретным и непрерывным временем. Траектории случайного процесса.

Тема 1.2. *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Примеры: пуассоновский случайный процесс и случайный процесс броуновского движения.

Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

Тема 2.1. *Предмет и задачи математической статистики.*

Тема 2.2. *Основные понятия выборочной теории:* выборка, вариационный ряд, гистограмма, полигон частот, эмпирическая функция распределения, теорема Гливенко. Распределения порядковых статистик. Выборочные моменты. Асимптотическая нормальность выборочных моментов.

Тема 2.3. *Оценивание неизвестных параметров.* Состоятельность (сильная состоятельность) оценок. Смещенные и несмещенные оценки, оптимальные оценки. Неравенство Рао – Крамера. Эффективность. Методы максимального правдоподобия и моментов. Достаточные статистики. Доверительное оценивание.

Тема 2.4. *Проверка статистических гипотез.* Критерии хи-квадрат Пирсона для проверки гипотез о виде распределения, однородности и независимости. Равномерно наиболее мощные критерии.

Тема 2.5. *Параметрические гипотезы.* Лемма Неймана – Пирсона. Примеры.

Тема 2.6. *Линейная регрессия и метод наименьших квадратов.*

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	7 семестр							
1.	Раздел 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	12	0	0	0	0	6	
1.1.	<i>Тема 1.1. Определение случайного процесса</i>	6	0	0	0	0	2	Опрос
1.1.1.	Процессы с дискретным и непрерывным временем. Траектории случайного процесса.				0			
1.2.	<i>Тема 1.2. Случайные процессы с независимыми приращениями</i>	6	0	0	0	0	4	Опрос. Проверка индивидуальных заданий
1.2.1.	Примеры: пуассоновский случайный процесс и случайный процесс броуновского движения.							
2.	Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	32	0	0	0	0	22	
2.1	<i>Тема 2.1. Предмет и задачи математической статистики</i>	6	0	0	0	0	4	Отчёты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой
2.2.	<i>Тема 2.2. Основные понятия и элементы выборочной теории</i>	6	0	0	0	0	4	Опрос. Проверка индивидуальных заданий
2.2.1.	Выборка, вариационный ряд, гистограмма, полигон частот, эмпирическая функция распределения,				0			

	теорема Гливенко. Асимптотическая нормальность выборочных моментов.							
2.3.	<i>Тема 2.3. Оценивание неизвестных параметров</i>	8	0	0	0	0	4	контрольная работа
2.3.1.	Состоятельность (сильная состоятельность) оценок. Смещенные и несмещенные оценки, оптимальные оценки. Неравенство Рао — Крамера. Эффективность. Методы максимального правдоподобия и моментов. Достаточные статистики. Доверительное оценивание.							
2.4.	<i>Тема 2.4. Проверка статистических гипотез</i>	4	0	0	0	0	4	Отчёты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой
2.4.1.	Равномерно наиболее мощные критерии.							
2.5.	<i>Тема 2.5. Параметрические гипотезы</i>	4	0	0	0	0	4	Опрос. Проверка индивидуальных заданий
2.5.1.	Лемма Неймана — Пирсона. Примеры.							
2.6.	<i>Тема 2.6. Линейная регрессия и метод наименьших квадратов</i>	4	0	0	0	0	2	Экспресс-опрос контрольная работа
	ВСЕГО по дисциплине	44	0	0	0	0	28	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1978.
3. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища шк., 1979.
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
5. Зуеў М. М., Сячко Ул. Ул. Тэорыя імавернасцей і матэматычная статыстыка. Мазыр: Белы вецер, 2000.
6. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. М.: Высш. шк., 1984.
7. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П., Яблонский О.Л. Теория вероятностей : учебник. – 3-е изд., с изменен. – Минск : БГУ, 2013.
8. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика. М.: Наука, 1985.
9. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.
10. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987.
11. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.

Дополнительная литература:

12. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
13. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
14. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1976.
15. Круглов В. М. Дополнительные главы теории вероятностей. М.: Высш. шк., 1984.
16. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П., Яблонский О.Л. Курс теории вероятностей : электронное учебное пособие. – Минск : Электронная книга БГУ, 2003.
17. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.
18. Парасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 1983.
19. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т.1,2.
20. Хеннекен П. А., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974.

Сборники задач по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика":

21. Жданович В.Ф., Лазакович Н.В. Радыно Н.Я. Задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики в двух частях. Ч.1. Минск, 1998.
22. Жданович В.Ф., Лазакович Н.В. Радыно Н.Я., Сташулёнок С.П. Задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики в двух частях. Ч.2. Минск, 1999.
23. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М: МГУ, 1963.
24. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М: Наука, 1986.
25. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. М: Наука, 1989.
26. Теория вероятностей : практикум : учеб. пособие для студ вузов по мат. спец. : в 2 ч. Ч. 1 / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, С. Л. Штин, О.Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. - Минск : БГУ, 2011. – 147 с.
27. Теория вероятностей : практикум : учеб. пособие для студ вузов по мат. спец. : в 2 ч. Ч. 2 / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, А. Г. Яблонская, О.Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. - Минск : БГУ, 2014.– 175с.

Справочная литература:

28. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973
29. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Королук В. С., Портенко Н. И., Скороход А.В., Турбин А. Ф. — М: Наука, 1985.

ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Управляемая самостоятельная работа по дисциплине «Некоторые элементы математической статистики» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий. Контроль осуществляется в виде отчётов по аудиторным и домашним практическим упражнениям с их устной защитой, о выполнении индивидуальных заданий и контрольных работ. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Контроль освоения практических навыков осуществляется в форме опроса и написания контрольной работы. По итогам семестра проводится экзамен.

Методика формирования итоговой оценки

Итоговая оценка формируется на основе 3-ех документов:

1. Правила проведения аттестации (Постановление №53 от 29.05.2012 г.).
2. Положение о рейтинговой системе БГУ (ред. 2015 г.).
3. Критерии оценки студентов (10 баллов).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Задания для опроса

1. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ выборка. Выборочное среднее $\bar{X}$ определяется формулой

- 1) $\min(X_1, \dots, X_n)$; 2) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$; 3) $\max(X_1, \dots, X_n)$;
4) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$; 5) $\sum_{k=1}^n X_k$.

2. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ выборка. Выборочная дисперсия S^2 определяется формулой

1) $\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k^2 - \bar{X})^2$; 2) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$; 3) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \bar{X}$;

4) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k^2 - \bar{X})^2$; 5) $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right)^2$.

3. Пусть статистика $T = T(X)$ такая, что $M_\theta T(X) = \theta$. Тогда T является

- 1) эффективной оценкой параметра θ ;
2) состоятельной оценкой параметра θ ;
3) несмещенной оценкой параметра θ ;
4) оптимальной оценкой параметра θ ;
5) достаточной статистикой для параметра θ .

4. Пусть статистика $T = T(X)$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ такая, что $T(X) \rightarrow \theta$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$. Тогда T является

- 1) эффективной оценкой параметра θ ;
2) состоятельной оценкой параметра θ ;
3) несмещенной оценкой параметра θ ;
4) оптимальной оценкой параметра θ ;
5) достаточной статистикой для параметра θ .

5. Пусть функция правдоподобия $L(\vec{x}; \theta)$ имеет вид $L(\vec{x}; \theta) = g(T(\vec{x}); \theta)h(\vec{x})$ для некоторых функций g , h и статистики $T = T(X)$. Тогда T является:

- 1) эффективной оценкой параметра θ ;
2) состоятельной оценкой параметра θ ;
3) несмещенной оценкой параметра θ ;
4) оптимальной оценкой параметра θ ;
5) достаточной статистикой для параметра θ .

Задания для контрольной работы

1. По выборке $X = (X_1, \dots, X_n)$ требуется оценить параметр θ равномерного распределения на $[0, \theta]$. Доказать, что $T = X_{(n)}$ – достаточная статистика для параметра θ . Выяснить, является ли она полной достаточной статистикой.

2. Рассматривается модель сдвига-масштаба $F\left(\frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}\right)$ показательного закона с функцией распределения $F(x)=1-e^{-x}$ для $x>0$ и $F(x)=0$ для $x\leq 0$. Найти достаточную статистику для параметра (θ_1, θ_2) этой модели.

3. Для выборки $X=(X_1, \dots, X_n)$ из закона Бернулли с неизвестной вероятностью «успеха» θ улучшить ее оценку X_1 с помощью достаточной статистики $T=\sum_{i=1}^n X_i$.

4. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[\theta-1, \theta+1]$, $\theta>0$.

5. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[-\theta, \theta]$, $\theta>0$.

6. Пусть $X=(X_1, \dots, X_n)$ – выборка из пуассоновского распределения с параметром θ . Доказать, что для параметрической функции $\tau(\theta)=\frac{1}{\theta}$ не существует несмещенных оценок.

7. Пусть $X=(X_1, \dots, X_n)$ – выборка из пуассоновского распределения с параметром $\ln \theta$. Является ли статистика $e^{\bar{X}}$ несмещенной оценкой параметра θ ? Будет ли она состоятельной?

8. Доказать полноту статистики $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ для выборки из пуассоновского распределения с параметром θ .

9. Доказать формулу для ковариации выборочных моментов A_{nk} и A_{ns} : $\text{cov}(A_{nk}, A_{ns})=(\alpha_{k+s}-\alpha_k \alpha_s)/n$, где α_m – теоретический момент порядка m .

**ПРОТОКОЛ
СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ
ДИСЦИПЛИНЕ
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

[illegible]

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на ____/____ учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
(протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)