Арув. к-т
3. а.
дисен.

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(название учреждения высшего образования)

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебной работе
Белорусского государственного университета
_____________ А.Л. Толстик
(подпись) (И.О.Фамилия)
30.06.2015
(дата утверждения)
Регистрационный № УД-1066/уч.

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
(название учебной дисциплины)

**Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность)
(код специальности) (наименование специальности)

2015 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2013, введенного в действие 30.08.2013; УП для специальности 1-31 03 01-02 "Математика (научно-педагогическая деятельность)" № G31-138/уч. от 30.05.2013г.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

А.И. Азаров, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой *веб-технологий и компьютерного моделирования*
(название кафедры – разработчика программы)
(протокол № 10 от 14.05.2015г.);
Учебно-методической комиссией *механико-математического факультета БГУ*
(название учреждения высшего образования)
(протокол № 6 от 26.05.2015г.).

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время численные методы являются одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Это связано как с бурным развитием вычислительной техники, наращиванием ее мощности, так и широким применением средств математического моделирования практически во всех сферах жизнедеятельности человека для оптимизации исследуемого объекта или прогнозирования ситуации. Поэтому в последнее время разрабатывается много новых численных процедур, применяемых как к новым, так и классическим объектам исследования, при этом многие классические алгоритмы решения задач претерпевают изменения с целью улучшения их вычислительных свойств.

Все это определяет важность курса «*Численные методы*» в учебном процессе, а также обуславливает необходимость внесения своевременных изменений и дополнений в его содержание.

Учебная программа *«Численные методы»* разработана для студентов III курса очной формы обучения специальности 1-31 03 01-02 – Математика (научно-педагогическая деятельность) механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

*Центральной идеей* образования по дисциплине «*Численные методы*» является необходимость обучения студентов современным подходам и численным методам решения прикладных задач, а также принципами их грамотного практического использования.

*Второй важнейшей идеей* обучения является подготовка студентов к практической работе в области численного моделирования научных и прикладных математических задач естествознания.

Дисциплина *«Численные методы»* имеет прикладную направленность. Ее ***основная цель*** заключаются в освоении учащимися современной технологии математического моделирования, основанной на использовании численных методов и прикладного программного обеспечения.

***Задачи дисциплины*** состоят в изучении основных принципов построения численных методов и оценки их вычислительных качеств, изучении основных методов численного решения задач линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

Опыт преподавания курса *«Численные методы»* на механико-математическом факультете БГУ показывает, что обучение на занятиях по вычислительному практикуму должно проводиться в двух направлениях: изучения основ численных методов на примере решения теоретических задач и выполнения расчетных работ с использованием компьютеров. При этом только непосредственное общение исследователя с конкретными задачами кроме возможности закрепить лекционный материал, помогает дать общее представление и выработать необходимую интуицию для нахождения эффективных путей решения задач вычислительной математики.

В последние годы высокая техническая оснащенность и рост возможностей вычислительной техники позволяют существенно обогатить практическую сторону вычислительного практикума. Использование новых современных программных пакетов (Maple, MathCAD, MathLAB, Mathematica и др.), а, также стандартных библиотек численного анализа позволяют, не углубляясь в знание частных вопросов, сосредоточиться непосредственно на объекте (цели) исследования, ускорить процесс получения решения типовых задач. Как следствие, решение большего числа разнообразных задач способствует приобретению студентами некоторого опыта практических расчетов. При этом спектр рассматриваемых проблем расширяется от типичных до достаточно сложных в вычислительном отношении задач, требующих для численной реализации использования мощных компьютеров. Появляется возможность уделять больше внимания анализу характеристик вычислительных алгоритмов и связи практических результатов с полученными теоретическими оценками.

Более того, часть времени, освобождающегося за счет использования современной вычислительной техники, позволяет уделять больше внимания детальному рассмотрению теоретических задач вычислительной математики. Это несомненно является важным моментом вычислительного практикума, поскольку как правило именно такого рода задачи помогают усваиванию, закреплению и более полному пониманию основных определений, понятий, результатов и алгоритмов вычислительной математики. Кроме того, решение теоретических задач позволяет установить связь между различными разделами математики, в частности, численного анализа, и, как следствие, способствует полноте восприятия курса по численным методам. При этом значительно возрастает роль самостоятельной работы студентов над предметом, без чего его успешное освоение представляется маловероятным. Общая оценка качества усвоения студентами учебного материала осуществляется в ходе выполнения индивидуальных заданий.

Программа курса *«Численные методы»* составлена с учетом межпредметных связей и программ по смежным дисциплинам. Его изучение базируется на знаниях из университетских курсов по алгебре, геометрии, математическому анализу, функциональному анализу, обыкновенным дифференциальным, в частных производных и интегральным уравнениям.

В основу учебной программы дисциплины *«Численные методы»* положены одноименные программы, разработанные академиком А.А.Самарским (МГУ им. М.В. Ломоносова) академиком Н.С. Бахваловым (МГУ им. М.В. Ломоносова).

В результате изучения дисциплины студент должен

***знать:***

– источники погрешности численных результатов;

– понятия устойчивости, сходимости и вычислительной сложности численных алгоритмов;

– требования корректности постановки задачи;

– основные приемы оценки погрешности численных методов;

– назначение и вычислительные качества наиболее популярных численных методов интерполирования (формулы Лагранжа и Ньютона, метод наилучшего приближения в среднеквадратичной норме), приближенного интегрирования (формулы трапеций и Симпсона, методы типа Гаусса наивысшей алгебраической степени точности), для задач алгебры, дифференциальных уравнений (метод Гаусса, LU-факторизация, итерационные методы Ричардсона, Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации, минимальных невязок, сопряженных градиентов, методы Рунге-Кутты и Адамса, метод стрельбы, быстрое дискретное преобразование Фурье);

– достоинства и недостатки явных и неявных численных методов решения дифференциальных уравнений;

– современные тенденции в развитии методов численного решения математических и прикладных задач;

– ***уметь:***

– оценить корректность постановки задачи;

– выбрать адекватный метод для численного решения поставленной задачи;

– использовать численные методы для решения математических задач алгебры, анализа и дифференциальных уравнений;

– анализировать достоверность и трактовать численные результаты;

***владеть:***

– навыками работы с современными программными средствами численного решения математических и прикладных задач;

– навыками программирования численных алгоритмов;

– основными приемами априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения задач алгебры и анализа.

Курс *«Численные методы»* рассчитан на 208 часов в V-VI семестрах, из них 106 аудиторных часов, в том числе 54 часов лекций, 46 часов практических занятий и 6 часов КСР/УСР.

Рекомендуется следующее ***распределение часов*** по курсам и видам учебной работы.

| | Экзамен, семестр | Зачет, семестр | Всего часов | В том числе аудиторных | Из них | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Лекций | Практических занятий | КСР/УСР |
| III курс, 5 семестр | | 6 | 124 | 54 | 36 | 16 | 2 |
| III курс, 6 семестр | 5 | | 84 | 52 | 18 | 30 | 4 |
| Всего | 5 | 6 | 208 | 106 | 54 | 46 | 6 |

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

**Тема 1. Введение**

Об основных задачах и содержании вычислительной математики.

Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского.

**Тема 2. Элементы теории погрешностей**

Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций.

Прямая и обратная задачи теории погрешностей.

Примеры неустойчивых алгоритмов.

Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел.

**Тема 3. Интерполирование и приближение функций**

Системы функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами.

Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.

Конечные разности.

Разделенные и разности, их свойства.

Интерполяционный многочлен Ньютона.

Представление погрешности интерполирования.

Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций. Многочлены Чебышева.

Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке.

Интерполирование по равноотстоящим узлам.

Интерполирование сплайнами.

Интерполяционная задача Эрмита.

**Тема 4. Приближенное вычисление интегралов**

Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании.

Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования.

Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования.

Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул.

Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы.

**Тема 5. Численные методы решения систем ЛАУ**

Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности.

Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента.

LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации.

Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.

Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра.
Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации.
Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

**Тема 6. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц**

Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия.
Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.
Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений.
Метод вращений. Понятие о QR алгоритме.

**Тема 7. Решение нелинейных уравнений и систем**

Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов.
Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости.
Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона.
Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы.

**Тема 8. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений**

Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости.
Методы Рунге-Кутты.
Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса.
Понятие о жестких системах ОДУ.
А-устойчивость. Метод Гира.

**Тема 9. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений**

Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка.
Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина.
Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем.
Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ.
Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы.

**Тема 10. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма**

Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки.

**Тема 11. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики**

Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем. Устойчивость, аппроксимация и сходимость.
Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости.
Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума

## ТРЕБОВАНИЯ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Курсовой работа, как форма текущей аттестации студентов, является видом самостоятельной работы студентов, носит учебно-исследовательский характер и представляет собой решение учебной задачи по изучаемой учебной дисциплине в соответствии с установленными требованиями.

Порядок организации курсового проектирования и защиты курсовых работ определяется учреждением высшего образования.

Студент вправе выбрать тему курсовой работы из числа утвержденных на кафедре или самостоятельно предложить тему курсовой работы с обоснованием ее целесообразности. Для формирования умений и навыков работы в команде возможно выполнение группового задания, предусматривающего работу нескольких обучающихся над одной курсовой работой. В этом случае каждому из них устанавливается индивидуальный объем задач в соответствии с объемом и уровнем общих требований.

### Цель курсовых работ

*по дисциплине «Численные методы»*:

а) закрепить, углубить и расширить теоретические знания по дисциплине с учетом современных тенденций в развитии методов численного решения математических и прикладных задач;

б) овладеть навыками самостоятельной работы с научной литературой; навыками работы с применением современных программных средств численного решения математических и прикладных задач;

в) закрепить и углубить навыки программирования численных алгоритмов;

г) овладеть основными приемами априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения математических задач алгебры, анализа и дифференциальных уравнений;

д) выработать умения произвести выбор адекватного метода для численного решения поставленной задачи; сформулировать суждение и выводы, логически последовательно и доказательно их изложить; выполнить анализ достоверности и трактовку численных результатов;

е) выработать умение публичной защиты.

*Требования к структуре курсовой работы.* Структура курсовой работы должна способствовать раскрытию избранной темы и быть аналогична структуре дипломной работы: иметь титульный лист, реферат, содержание, введение, основную часть, заключение, список использованных источников и приложения.

*Требования к содержанию (основной части).* Требования к реферату и содержанию (основной части) курсовых работ аналогичны правилам оформления реферата и содержания дипломных работ. Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, определяется общая цель курсовой работы, конкретные ее задачи и методы исследования. Основная часть работы включает две – четыре главы, которые разбивают на разделы и подразделы. Каждая глава посвящается решению задач, сформулированных во введении, и заканчивается констатацией итогов. Серьезные теоретические положения необходимо давать со ссылкой на источник. Написание курсовой работы предполагает более глубокое изучение избранной темы, нежели она раскрывается в учебной литературе. В работах, носящих в основном теоретический характер, анализируя литературу по теме исследования, изучая и описывая опыт наблюдаемых событий (явлений), студент обязательно высказывает свое мнение и отношение к затрагиваемым сторонам проблемы.

*Требования к оформлению.* Объем курсовой работы – до 25–30 страниц печатного текста размера 14pt, выполненного через 1,5 межстрочных интервала. Оформление заключения, списка использованных источников и приложения осуществляется в соответствии с требованиями ГОСТа. Работу сшивают в папку-скоросшиватель или переплетают.

Выполненная студентом курсовая работа проверяется руководителем работы в срок до 10 дней до защиты. Защита курсовых работ производится до начала экзаменационной сессии перед комиссией, которая формируется заведующим кафедрой в составе не менее двух человек с участием руководителя курсовой работы.

На защите студент обязан кратко изложить содержание работы, дать исчерпывающие ответы на вопросы членов комиссии. Оценка курсовой работы выставляется комиссией по итогам защиты и качеству выполненной работы.

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

| Номер раздела, темы | Название раздела, темы | Количество аудиторных часов | | | | | Количество часов УСР | Литература | Форма контроля знаний |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Лекции | Практические занятия | Семинарские занятия | Лабораторные занятия | Иное (аудиторный контроль УСР) | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **1** | **Тема: Введение** | | | | | | **2** | **[2]** | |
| 1.1-1.2 | 1.1 Об основных задачах и содержании вычислительной математики<br>1.2 Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского | | | | | | 2 | [2] | |
| **2** | **Тема: Элементы теории погрешностей** | | | | | | **4** | **[1], [3]** | |
| 2.1-2.4 | 2.1 Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций<br>2.2 Прямая и обратная задачи теории погрешностей<br>2.3 Примеры неустойчивых алгоритмов<br>2.4 Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел | | | | | | 4 | [1], [3] | |
| **3** | **Тема: Интерполирование и приближение функций** | **2** | **2** | | | | **12** | **[1], [2], [3], [12], [17]** | Опрос |
| 3.1 | Системы Функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами | 0,25 | | | | | 1 | [2], [3], [12], [17] | Опрос |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.2 | Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа | 0,25 | 1 | | | | 1 | [2], [3], [12], [17] | Опрос, отчет по лабораторной работе |
| 3.3 | Конечные разности | 0,25 | | | | | 1 | [2], [3], [12], [17] | |
| 3.4 | Разделенные и разности, их свойства | 0,25 | | | | | 1 | [2], [3], [12], [17] | |
| 3.5 | Интерполяционный многочлен Ньютона | 0,25 | 0,5 | | | | 1 | [2], [3], [12], [17] | Опрос, отчет по лабораторной работе |
| 3.6-3.7 | 3.6 Представление погрешности интерполирования<br>3.7 Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций | 0,25 | | | | | 1 | [2], [12], [17] | |
| 3.8 | Многочлены Чебышева | 0,25 | | | | | 1 | [2] | |
| 3.9 | Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке | 0,25 | 0,5 | | | | 1 | [2], [17] | Опрос, отчет по лабораторной работе |
| 3.10 | Интерполирование по равноотстоящим узлам | | | | | | 1 | [2], [3], [12], [17] | |
| 3.11 | Интерполирование сплайнами | | | | | | 2 | [2], [3], [17] | |
| 3.12 | Интерполяционная задача Эрмита | | | | | | 1 | [2], [17] | |
| **4** | **Тема: Приближенное вычисление интегралов** | **2** | | | | | **6** | **[1], [2], [3], [12], [17]** | Коллоквиум |
| 4.1 | Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании | 0,5 | | | | | 1 | [2], [3], [12], [17] | |
| 4.2 | тейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования | 0,5 | | | | | 1 | [2], [11], [17] | |
| 4.3 | Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования | 0,5 | | | | | 1 | [2], [3], [12], [17] | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.4 | Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул | | | | | | 1 | [1], [2] | |
| 4.5 | Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы | 0,5 | | | | | 2 | [2], [3], [12], [17] | Опрос |
| **5** | **Тема: Численные методы решения систем ЛАУ.** | **10** | **8** | | | | **14** | **[1],[3],[5], [20]** | |
| 5.1 | Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности | | 2 | | | | 2 | [1], [3],[5],[20] | Опрос |
| 5.2 | Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента | 2 | 2 | | | | 2 | [5],[20] | |
| 5.3 | LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации | 2 | | | | | 2 | [5],[20] | Опрос |
| 5.4 | Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации | 2 | 1 | | | | 2 | [illegible],[20] | Отчет по лабораторной работе |
| 5.5 | Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра | 1 | 1 | | | | 2 | [1],[5] | |
| 5.6 | Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации | 1 | 1 | | | | 2 | [1],[5] | Опрос |
| 5.7 | Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов | 2 | 1 | | | 2 | 2 | [1] | Отчет по лабораторной работе |
| **6** | **Тема: Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц** | **6** | **6** | | | | **10** | **[1],[3],[20]** | |
| 6.1 | Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия | 1 | | | | | 2 | [1],[20] | Опрос |
| 6.2 | Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского | 1 | 2 | | | | 2 | [1], [3], [20] | Опрос |
| 6.3 | Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений | 2 | 2 | | | | 2 | [1], [3], [20] | Опрос |
| 6.4 | Метод вращений. Понятие о QR алгоритме | 2 | 2 | | | | 4 | [1],[20] | Отчет по лабораторной работам |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | **Тема: Решение нелинейных уравнений и систем** | **10** | **8** | | | | **14** | **[1],[3],[5], [10]** | |
| 7.1 | Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов | 2 | 2 | | | | 4 | [1],[5],[10] | |
| 7.2 | Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости | 2 | 2 | | | | 4 | [1],[3],[5], [10] | Опрос |
| 7.3 | Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона | 4 | 2 | | | 2 | 2 | [1],[3],[5], [10] | Опрос |
| 7.4 | Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные метод | 2 | 2 | | | | 4 | [1],[3] | Отчет по лабораторной работе |
| 8 | **Тема: Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений** | **10** | **8** | | | | **14** | **[1],[3],[5], [10]** | |
| 8.1 | Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости | 2 | 2 | | | | 4 | [3],[5],[10] | Опрос |
| 8.2 | Методы Рунге-Кутты | 2 | 2 | | | | 4 | [3],[5],[10] | Опрос |
| 8.3 | Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса | 4 | 2 | | | 2 | 4 | [1],[3],[5] | Опрос |
| 8.4 | Понятие о жестких системах ОДУ.<br>А-устойчивость. Метод Гира | 2 | 2 | | | | 2 | [1],[3],[5] | тчет по лабораторной работе |
| 9 | **Тема: Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений** | **4** | **4** | | | | **8** | **[1],[4],[5], [10]** | |
| 9.1 | Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка | | 1 | | | | 1 | [4],[5] | Опрос |
| 9.2 | Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина | 2 | 1 | | | | 2 | [4],[5] | Опрос |
| 9.3 | Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем | 1 | | | | | 1 | [4],[5] | Опрос |
| 9.4 | Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ | | 1 | | | | 2 | [4],[5],[10] | Опрос |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9.5 | Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы | 1 | 1 | | | | 2 | [1],[4],[10] | Отчет по лабораторной работе |
| **10** | **Тема: Численное решение интегральных уравнений Фредгольма** | **2** | **2** | | | | **4** | **[1],[3]** | |
| 10.1 | Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки | 2 | 2 | | | | 4 | [1],[3] | Опрос |
| **11** | **Тема: Построение и исследование разностных схем для задач математической физики** | **8** | **8** | | | | **14** | **[4],[5],[10], [18], [20]** | |
| 11.1 | Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем | 4 | 4 | | | | 4 | [4],[5],[10] | Отчет по лабораторной работе |
| 11.2 | Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости | 2 | 2 | | | | 6 | [4],[5],[10] | Отчет по лабораторной работе |
| 11.3 | Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума | 2 | 2 | | | | 4 | [4],[5], [18] | Отчет по лабораторной работе |
| | | | | | | | | | **Экзамен 5 семестр Зачет 6 семестр** |
| **ИТОГО** | | **54** | **46** | | | **6** | | | |

# ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература

1. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. 632 с.

2. *Игнатенко, М. В.* Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование: курс лекций / М. В. Игнатенко. – Минск: БГУ, 2006. 116 с.

3. *Монастырный, П. И.* Сборник задач по методам вычислений: учебное пособие / А.И. Азаров, В.А. Басик, М.В. Игнатенко и др./ под ред. П.И. Монастырного. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 376 с.

4. *Самарский, А. А* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. 432 с.

### Дополнительная литература

5. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы в задачах и примерах / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – М.: Высш. шк., 2000. 190 с.
6. *Березин, И. С.* Методы вычислений. В 2 т. / И. С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Наука, 1966. Т. 1. 464 с.
7. *Березин, И. С.* Методы вычислений. В 2 т. / И. С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. 640 с.
8. *Годунов, С. К.* Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. 440 с.
9. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. 512 с.
10. *Крылов, В. И.* Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. 500 с.
11. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. Т. 1. 304 с.
12. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1977. Т. 2. 400 с.
13. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1982.
286 с.
14. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1986. 311 с.
15. *Марчук, Г. И.* Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1989. 608 с.
16. *Мысовских, И. П.* Лекции по методам вычислений: учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. 470 с.
17. *Самарский, А. А.* Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1987. 288 с.
18. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. 616 с.
19. *Самарский, А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1987. 600 с.
20. *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. П. Фаддеева. – М.: Физматгиз, 1963. 386 с.

## ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Контрольные мероприятия УСР по дисциплине «*Численные методы*» проводятся преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий. Контроль осуществляется в виде:

– экспресс-опроса на аудиторных занятиях;
– защиты учебных заданий по практическим и лабораторным работам;
– контрольных работ.

Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

## ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Индивидуальные задания для управляемой самостоятельной работы включают решения не менее десяти теоретических задач различного уровня сложности, которые сдаются на проверку в письменном или устном виде, а также вопросы практического использования численных методов.

**Разделы 1-2. Ведение. Элементы теории погрешностей**

1. Определить относительную погрешность при вычислении полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований $R$ и $r$ и образующая $l$, измеренные с точностью до 0,01 см, следующие $R = 23,64$ см, $r = 17,31$ см, $l = 10,21$ см.

2. Высота $h$ и радиус основания $R$ цилиндра измерены с точностью до 0,5%. Какова относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

3. Длина периметра правильного вписанного 96-угольника, которым пользовался Архимед при вычислении $\pi$, выражается при $r = 1$ формулой $p = 96\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$. Если вычислять непосредственно по этой формуле, желая получить $\pi$ с точностью до 0,001, то с какой точностью нужно производить вычисления подкоренных величин?

4. Какая из формул $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$ или $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2\right)$, где $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ является численно более устойчивой для вычисления отклонения $S^2$ множества событий $x_1, \dots, x_n$.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 1 , задачи 1-30.

## Раздел 3. Интерполирование и приближение функций

1. Функция $f(x)=\dfrac{1}{A^2-x}$ приближается на $[-4;\ -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i=-4,-3,-2,-1$. При каких значениях $A$ оценка погрешности в равномерной норме не превосходит $10^{-5}$?

2. Функция $f(x)=e^{2x}$ приближается на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right]$ интерполяционным многочленом второй степени по трём узлам: $-{}^1\!/_2,\ 0,\ {}^1\!/_2$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит ${}^{\sqrt{3}}\!/_9$.

3. Пусть функция $f(x)=\sin x$ задана на отрезке $[4;b]$. При каком $b>4$ многочлен Лагранжа третьей степени, построенный по оптимальным узлам, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon\le 10^{-3}$?

4. Оценить число равноудаленных на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ точек, обеспечивающее интерполирование функции $f(x)=\sin x$ с точностью $\varepsilon\le 10^{-2}$.

5. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1000 до 10000. Какова наибольшая погрешность линейной (квадратичной) интерполяции, если шаг равен 1?

6. Оценить погрешность приближения функции $e^{2x}$ на $[2;\ 5]$ интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, построенным по оптимальным узлам.

7. С какой точностью можно вычислить по формуле Ньютона $\cos 10{,}5$ по известным значениям $\cos 10$, $\cos 11$, $\cos 12$, $\cos 13$, $\cos 14$, $\cos 15$?

8. Оценить число точек на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, обеспечивающее интерполирование функции $f(x)=\sin x$ с точностью $\varepsilon\le 10^{-2}$.

9. Функция $ln(x)$ приближается на отрезке $[1,2]$ интерполяционным многочленом третьей степени по четырём узлам 1, ${}^4\!/_3$, ${}^5\!/_3$, 2. Доказать, что погрешность интерполирования в равномерной норме не превосходит ${}^1\!/_{300}$.

10 Дана таблица синусов с шагом 1. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции?

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 6, задачи 1-62.

## Раздел 4. Приближенное вычисление интегралов

1. Пусть весовая функция $p(x)$ четна, узлы $x_i$ расположены симметрично относительно нуля, т.е. $x_{n+1-i}=-x_i$, $i=1,\ldots,n$. Доказать, что в интерпо-

ляционной квадратурной формуле $I(f) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ для вычисления интеграла $I(f) = \int_{-a}^{a} p(x) f(x) dx$ коэффициенты, соответствующие симметричным узлам равны, т.е. $c_{n+1-i} = c_i$, $i = 1,\dots,n$.

2. Для вычисления $\int_0^1 f(x)dx$ применяется составная формула трапеций. Оценить минимальное число разбиений $N$, обеспечивающее точность $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ на двух классах функций:

$$1)\ \|f''(x)\| \le 1; \qquad 2)\ \int_0^1 |f''(x)| dx \le 1.$$

3. Найти оценку погрешности вычисления интеграла $\int_0^1 f(x)dx$ при $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ по составной квадратурной формуле

$$S(f) = \big(f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 4f(0{,}3) + \dots + 4f(0{,}9) + f(1{,}0)\big)/30.$$

4. Оценить минимальное количество узлов составной квадратурной формулы Симпсона для вычисления интеграла $\int_0^2 f(x)dx$, обеспечивающее точность $\varepsilon \le 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ на классе функций, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x \in [0;2]} \left| f^{(IV)}(x) \right| \le 1$.

5. Пусть $f \in C^{(1)}[-1;1]$ и $P_5(x)$ — алгебраический полином пятой степени, удовлетворяющий условиям $P(x_k) = f(x_k)$, $P'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 1,2,3$, где $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Рассмотрим квадратурную формулу следующего вида:

$$S_5(f) = \big(7f(-1) + 16f(0) + 7f(1) + f'(-1) - 15f'(1)\big)/15.$$

Проверить, что $\int_{-1}^{1} P_5(x)dx = S_5(P_5)$, и доказать, что $S_5(f)$ точна на полиномах пятой степени, но найдется полином степени 6, на котором она не точна.

6. Доказать, что ортогональный многочлен степени $n$ имеет ровно $n$ различных корней на отрезке $[a,b]$.

7. Доказать, что среди всех многочленов степени $n$ вида $P_n(x) = x^n + \dots$ минимальную норму $\|P_n\|^2 = \int_a^b p(x) P_n^2(x) dx$ имеет ортогональный многочлен $\psi_n(x)$ со старшим коэффициентом 1.

8. Для ортогональных многочленов вида $\psi_n(x)=x^n+\ldots$ показать справедливость рекуррентного соотношения $\psi_n(x)=(x+b_n)\psi_{n-1}(x)-c_n\psi_{n-2}(x)$ с коэффициентом $c_n>0$.

9. Доказать, что ортогональные многочлены на симметричном относительно нуля отрезке с четным весом $p(x)$ обладают свойством $\psi_n(-x)=(-1)^n\psi_n(x)$.

10. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 7, задачи 1-4; гл. 8, задачи 1-217.

## Раздел 5. Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных

1. В пространстве $R^2$ выбрать произвольную ньютоновскую систему точек $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{\mu}$, $\mu=C_{2+m}^2$, для заданного $m$. Убедиться, что выбранные точки не лежат на алгебраической кривой порядка $m$ (проверить равносильное условие $|V_m|\neq 0$, где $V_m$ – матрица Вандермонда, построенная по точкам $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{\mu}$). Для заданной функции $f(x,y)$ построить интерполяционный многочлен $P_m(x,y)$ степени не выше $m$ от $n$ переменных вида $P_m(x,y)=\sum_{i=1}^{\mu}b_i\varphi_i(x,y)$, удовлетворяющий условиям $\sum_{i=1}^{\mu}b_i\varphi_i(x_j,y_j)=f(x_j,y_j)$, $j=1,2,\ldots,\mu$, где $\{\varphi_i(x,y)\}_{i=1}^{\mu}$ – множество всех одночленов степени не выше $m$ от $n$ переменных в случае *а)* $m=3$, $f(x,y)=5x\sin y$; *б)* $m=2$, $f(x,y,z)=2xz\cos y$.

2. Пусть известна таблица значений функции $f(x,y,z)$ для аргументов из некоторой произвольно выбранной ньютоновской системы точек $\{(x_i,y_i,z_i)\}_{i=1}^{\mu}$, $\mu=C_{3+m}^3$, в пространстве $R^3$, где $m$ – заданное натуральное число. Найти приближенные значения следующих частных производных:

$$а)\ \frac{\partial f(x_{m-1},y_{m-1},z_{m-1})}{\partial x},\quad б)\ \frac{\partial f^m\qquad(x_m,y_m,z_m)}{\partial x^{m-2}\partial y\,\partial z},$$

с помощью соответствующих частных производных от интерполяционного многочлена $P_m(x,y,z)=\sum_{i=1}^{\mu}b_i\varphi_i(x,y,z)$ степени не выше $m$ от трех переменных для функции $f(x,y,z)$, удовлетворяющего условиям $\sum_{i=1}^{\mu}b_i\varphi_i(x_j,y_j,z_j)=f(x_j,y_j,z_j)$, $j=1,2,\ldots,\mu$, где $\{\varphi_i(x,y,z)\}_{i=1}^{\mu}$ – множество всех одночленов степени не выше $m$ от трех переменных; а также методом неопределенных коэффициентов в случае *1)*

$m=2;\ f(x,y,z)=2^y cos(x+y+z)$;
2) $m=3;\ f(x,y,z)=3^{xy} sin(y+z)$.

3. Вычислить $n$-кратный интеграл от заданной функции $f$ по области $\Omega=[0;1]^n$, применяя интерполяционную кубатурную формулу с числом узлов $\mu=C_{n+m}^n$, для указанных значений $n$ и $m$:

а) $n=2;\ m=4;\ f(x,y)=2x\cos y$; б) $n=3;\ m=2;\ f(x,y,z)=5ze^{x+y}$.

4. Вычислить $n$ – кратный интеграл от заданной функции $f$ по области $\Omega=[0;1]^n$ методом повторного применения квадратурной формулы гауссова типа $(p(x)\equiv1)$ для отрезка $[0;1]$ с числом узлов, равным $m$; убедиться, что полученная кубатурная формула является точной для всех одночленов степени не выше $2m-1$ по каждой из $n$ переменных:

а) $n=2;\ m=4;\ f(x,y)=2x\cos y$; б) $n=3;\ m=2;\ f(x,y,z)=5ze^{x+y}$.

5. Вычислить $n$ – кратный интеграл от заданной функции $f$ по области $\Omega=[-1;1]^n$ методом Монте-Карло дважды с различным числом испытаний $N$; убедиться, что абсолютная погрешность интегрирования не превышает оценки погрешности интегрирования методом Монте-Карло, полученной с помощью правила «трёх сигм»: а) $n=2;\ f(x,y)=2x\cos y;\ N=5000,\ 15000$; б) $n=3;\ f(x,y,z)=5ze^{x+y};\ N=6000,\ 10000$.

## Разделы 6-7. Численные методы решения систем ЛАУ. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

1. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A\in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_1$, справедливо представление $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

2. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A\in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_\infty$, справедливо представление $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

3. Пусть $A=A^T$. Доказать, что $\max\limits_{\|x\|_2=1}|(Ax,x)|=\rho(A)$.

4. Пусть числа $d_k>0, k=\overline{1,n}$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n}d_k|x_k|$ является нормой вектора $x$. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

5. Пусть числа $d_k>0, k=\overline{1,n}$. Доказать, что $\max\limits_k(d_k|x_k|)$ является нормой вектора $x$. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

6. Пусть $\left|a_{jj}\right| > \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left|a_{ij}\right|$. Доказать, что метод простой итерации $x^{(n+1)} = Sx^{(n)} + \phi$ для системы $Ax = b$ сходится.

7. Пусть $\left|a_{jj}\right| > \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left|a_{ij}\right|$. Доказать, что $det\,A \neq 0$.

8. Пусть $A = A^T > 0$. Доказать, что итерационный процесс $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau\left(A\dfrac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2} - b\right)$ сходится при $\tau > 0$. Оценить его скорость сходимости, если известны $\lambda_{max}(A)$ и $\lambda_{min}(A)$.

9. Найти все матрицы, для которых метод итераций будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$, где $\alpha, \beta$ – некоторые числа.

10. При каких значениях параметра $\tau$ метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau f$ для системы уравнений $Ax = f$ с матрицей $A = \begin{bmatrix} 5 & 0{,}8 & 4 \\ 2{,}5 & 3 & 0 \\ 2 & 0{,}8 & 4 \end{bmatrix}$ сходится для произвольного приближения?

11. Доказать неравенство $\|x\|_C^2 \le \rho(C)\|x\|_2^2$, где $C = C^T > 0$.

12. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 1 \end{bmatrix}$. Записать сходящийся метод простой итерации. Найти оптимальное значение итерационного параметра $\tau$.

13. Показать, что для системы ЛАУ $Ax = b$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4.8 \end{bmatrix}$, метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau b$ сходится для любого начального приближения при $0 < \tau < 0.4$.

14. Найти все матрицы, для которых метод Зейделя будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, где $\alpha, \beta$ – некоторые числа.

15. Пусть $A = A^T$ имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$ Доказать, что при любом $\tau > 0$ итерационный процесс $\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + A\left(\dfrac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2}\right) = b$ сходиться. Определить оптимальное значение $\tau_{опт}$.

16. Найти $\alpha, \beta$, при которых метод Зейделя будет сходящимся для систем уравнений $x = Hx + \phi$ с матрицей вида $H = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

17. Число обусловленности матрицы $A$ равно $q$. Найти число обусловленности матрицы $A^{-1}$.

18. При решении системы ЛАУ с матрицей размерности $128 \times 128$ методом сопряженных градиентов за 50 итераций достигается относительная погрешность приближенного решения 1.*e*-3. Какое максимальное число итераций потребуется для достижения точности не хуже, чем 1.*e*-9?

19. Число обусловленности симметричной матрицы $K$=1.*e*9. Максимальное собственное значение при этом равно 1000. Вычислить минимальное и максимальное собственные значения обратной матрицы.

20. Какой будет значение переменной x, если все переменные класса double p=(S+1)^2/(S-1)^2; if(p==1); x=1; else x=0; end;

a) p=1.e-20; b) p=1.e-12; c) p=1.e12; d) p=1.e151; p=1.e155.

21. Какая геометрическая фигура в $R^3$ будет определена множеством точек $\|x\| = const$ в случае максимальной и квадратичной норм?

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.2, задачи 81-88, 107-114.

## Раздел 8. Решение нелинейных уравнений и систем

1. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления корня $n-$ой степени $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$, $n-$вещественное число.

2. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ методом простой итерации.

3. Определить область начальных приближений $x_0$, для которых итерационный процесс $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 1}{20}$ сходится.

4. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p > 1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Показать, что при этих условиях метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $(p-1)/p$.

5. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p > 1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

6. Построить метод Ньютона для вычисления числа $\dfrac{1}{a}$ так, чтобы расчетные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a > 0$.

7. Пусть дана функция $\phi(x) = \alpha\, sin^2 x + \beta\, cos^2 x - \gamma$. При каких ограничениях на параметры $\alpha, \beta, \gamma$ метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

8. Пусть дана функция $\phi(x) = ae^{-bx^2} + c$, $a \neq 0$, $b \geq 0$. При каких ограничениях на $a, b$ и $c$ метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

9. Построить метод простой итерации для решения уравнения $2 + x = e^x$, $x > 0$.

10. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ в зависимости от выбора начального приближения $x_0$.

11. Дано уравнение $x = \phi(x) = \pi/2\, sin\, x$, которое решается методом простой итерации $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Найти область сходимости к корням уравнения.

12. Определить скорость сходимости метода Ньютона к корням уравнения $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

13. Для вычисления $x = \sqrt{2}$ используется итерационный процесс $x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n + \nu(x_n^2 - 2)$. При каком выборе $\nu$ этот процесс имеет квадратичную скорость сходимости?

14. Построить метод простой итерации для решения уравнения $cos\, x - \dfrac{1}{x} sin\, x = 0$, сходящийся при любом начальном приближении $x_0 \neq 0$.

15. Найти область сходимости метода простой итерации для следующего уравнения $x = e^{2x} - 1$.

16. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x) = 3x + cos\, x + 1 = 0$ методом простой итерации.

17. Уравнение $x = 2^{x-1}$ решается методом простой итерации. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения $x_0$.

18. Пусть $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения $x_0$.

19. При каких значениях $p$ метод простой итерации $x_{k+1} = x_k + p(1 - x^{1/2})$ сходится к корню $x = 1$: а) если $x_0 > 1$; б) если $x_0 < 1$.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.4, задачи 52, 54, 105.

**Разделы 9-10. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений**

1. Используя разностное уравнение, выписать формулу для вычисления интеграла $I_k(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{cos(kx) - cos(k\alpha)}{cos\, x - cos\, \alpha} dx$, где $\alpha$ – параметр.

2. Доказать, что для чисел Фибоначчи $f_k$: $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, справедливо равенство $f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

3. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1} - 5y_k + 6y_{k-1} = 0$ удовлетворяет уравнению $y_{k+1} - 9y_k + 27y_{k-1} - 23y_{k-2} - 24y_{k-3} + 36y_{k-4} = 0$

4. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1} - 12y_{k-1} + 2y_{k-2} + 27y_{k-3} - 18y_{k-4} = 0$ однозначно представимо в виде суммы решений уравнений $y_{k+1} - 3y_{k-1} + 2y_{k-2} = 0$ и $y_{k+1} - 9y_{k-1} = 0$.

5. Вычислить определитель $\Delta_k = \det A_k$ трехдиагональной матрицы порядка $k$ $A_k = \begin{pmatrix} b & c & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a & b \end{pmatrix}$, учитывая, что $\Delta_0 = 1$.

6. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + y_k = 0$, $y_0 = 2$, $y_1 = 1$.

7. Пусть $\phi_k$ и $z_k$ – два частных решения уравнения $a_1 y_{k+1} + a_0 y_k + a_{-1} y_{k-1} = 0$, $a_1 a_{-1} \neq 0$. Доказать, что определитель матрицы $A_k = \begin{pmatrix} \phi_k & \phi_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{pmatrix}$ либо равен нулю, либо отличен от нуля для всех $k$ одновременно.

8. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

9. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1} - 2xy_i + y_{i+1} = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = x$ являются полиномы Чебышева первого рода $T_i(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^i + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^i\right]$, $|x| \geq 1$.

10. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1} - 2xy_i + y_{i+1} = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2x$, являются полиномы Чебышева второго рода $U_i(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{i+1} - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{i+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| \geq 1$.

11. Найти общее решение уравнения $y_{i-1} - 5y_i + 6y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

12. Найти общее решение уравнения $y_{i-1} - \frac{5}{2} y_i + y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

13. Определить 1000-й член последовательности, первые два члена которой равны единице, а последующие определяются рекуррентными соотношениями $y_{i+1} = y_{i-1} + y_i$, $i = 2,3....$

14. Найти общее решение уравнения $by_{i+1} - cy_i + ay_{i-1} = 0$, $i = 0,\pm 1,\pm 2,....$

15. Найти общее действительное решение уравнения $2y_{i-1} - y_i + y_{i+1} = 0$, $i = 0,\pm 1,\pm 2,...$

16. Найти решение разностной задачи $2y_i + 3y_{i+1} + y_{i+2} = 0$, $y_0 = 2$, $y_1 = 1$.

17. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.10, задачи 51-56.

**Разделы 11-12. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики**

1. Построить разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial u}{\partial x} + \phi(x,t)$ на сетке $(x_m,t_n)$, где $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, используя шаблоны:

1) $Ш(x_m,t_n) = \{(x_{m-1},t_n),(x_{m+1},t_n),(x_{m-1},t_{n+1}),(x_{m+1},t_{n+1})\}$;

2) $Ш(x_m,t_n) = \{(x_m,t_{n-1}),(x_{m-1},t_n),(x_m,t_n),(x_{m+1},t_n),(x_m,t_{n+1})\}$;

Оценить погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным в точке $(x_m,t_n)$.

2. Построить аппроксимацию условия $u(0,t) = \psi(t)$ с привлечением значений сеточных функций в точках: 1) $\left(\dfrac{1}{2}h,t_n\right)$; 2) $\left(\dfrac{1}{2}h,t_n\right),\left(\dfrac{3}{2}h,t_n\right),\left(\dfrac{5}{2}h,t_n\right)$. Оценить погрешность аппроксимации.

3. Показать, что разностная схема $\dfrac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \dfrac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}$ аппроксимирует дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на сетке $(x_m,t_n)$, $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, со вторым порядком по $\tau$ и четвертым по $h$, если $\dfrac{\tau}{h^2} = \dfrac{1}{6}$.

4. Пусть даны дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\dfrac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \sigma\dfrac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma)\dfrac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при ка-

ком значении параметра $\sigma$ порядок аппроксимации будет вторым по $\tau$ и вторым по $h$.

5. Исследовать сходимость к решению задачи Коши $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $-\infty<x<+\infty$, $0\le t\le T$, $u(x,0)=\psi(x)$, $-\infty<x<+\infty$, $a>0-Const$ решений следующей разностной схемы

$$\frac{y_m^n-y_m^{n-1}}{\tau}=a\sigma\frac{y_{m+1}^n-y_m^n}{h}+a(1-\sigma)\frac{y_m^n-y_{m-1}^n}{h},$$

$$y_m^0=\psi(x_m),\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\ n=0,1,\ldots N-1,\ N\tau=T.$$

6. Исследовать сходимость разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=(1-\sigma)\frac{y_{m-1}^{n+1}-2y_m^{n+1}+y_{m+1}^{n+1}}{2h^2}+\sigma\frac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{2h^2},$$

$$m=1,2,\ldots M-1,\ n=0,1,\ldots N-1,\ N\tau=T,\ Mh=1,$$

$$y_m^0=\psi(x_m),\ u_0^n=0,\ u_M^n=0,$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T,$$

$$u(x,0)=\psi(x),$$

$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=0,$$

Здесь $x_m=mh$, $t_n=n\tau$, $0\le\sigma\le1$.

7. При каких значениях параметра $\theta\in[0;1]$ разностная схема $\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=(1-\theta)\dfrac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2}+\theta\dfrac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}$ устойчива?

8. Определить, при каких значениях параметра $\theta\in[0;1]$ схема $\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\theta\dfrac{u_{m+1}^n-u_m^n}{h}+(1-\theta)\dfrac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h}=0$ устойчива?

9. Пусть даны дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\dfrac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=\sigma\dfrac{y_{m+1}^{n+1}-2y_m^{n+1}+y_{m-1}^{n+1}}{h^2}+(1-\sigma)\dfrac{y_{m+1}^n-2y_m^n+y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при каком значении параметра $\sigma$ порядок аппроксимации будет вторым по $\tau$ и четвертым по $h$.

10. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\dfrac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}-\dfrac{h^2}{2\tau}\dfrac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}=0$.

11. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\dfrac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}-\dfrac{a^2\tau}{2}\dfrac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}=0$.

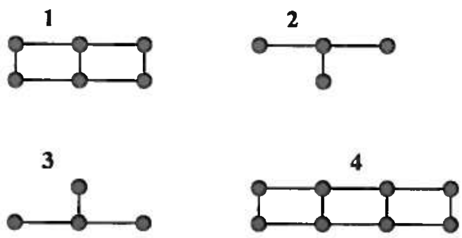
12. Определить порядок аппроксимации разностных схем на решении уравнения теплопроводности и переноса

а) $\dfrac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=\dfrac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{h^2}+f_m$, б) $\dfrac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}+\dfrac{y_{m+1}^n-y_m^n}{h}=0$.

13. Методом гармоник исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}+\frac{y_{m+1}^n-y_m^n}{h}=0.$$

14. Какой (какие) из шаблонов




соответствует типовым неявным двухслойным схемам для нестационарного уравнения теплопроводности?

15. Разностная схема для уравнения теплопроводности имеет порядок аппроксимации $O(h^2+\tau)$ и сходится. Во сколько раз возрастут вычислительные затраты по данной разностной схеме если требуется увеличить точность решения в 16 раз. Предполагается, что вычислительные затраты растут пропорционально числу узлов сетки.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.11, задачи 49–57.

## СРЕДСТВА ДИАГНОСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Рекомендуются следующие формы диагностики компетенций.

**Устная форма**

1. Собеседования. Добавить коллоквиум

**Письменная форма**

1. Контрольные опросы.
2. Контрольные работы.

**Устно-письменная форма**

1. Отчеты по домашним практическим заданиям с их устной защитой.
2. Курсовые работы с их устной защитой.
3. Зачет.
4. Экзамен.

**ПРОТОКОЛ**
**СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

| Название дисциплины, с которой требуется согласование | Название кафедры | Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) |
|---|---|---|---|
| Алгебра и теория чисел | Высшей алгебры и защиты информации | Нет | Вносить изменения не требуется (протокол №10 от 14.05.2015г.) |
| Геометрия | Геометрии и методики преподавания математики | Нет | Вносить изменения не требуется (протокол №10 от 14.05.2015г.) |
| Математический анализ | Теории функций | Нет | Вносить изменения не требуется (протокол №10 от 14.05.2015г.) |
| Функциональный анализ | Функционального анализа | Нет | Вносить изменения не требуется (протокол №10 от 14.05.2015г.) |
| Дифференциальные уравнения | Дифференциальных уравнений и системного анализа | Нет | Вносить изменения не требуется (протокол №10 от 14.05.2015г.) |
| Уравнения математической физики | Математической кибернетики | Нет | Вносить изменения не требуется (протокол №10 от 14.05.2015г.) |

# ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на 2016/2017 учебный год

| № пп | Дополнения и изменения | Основание |
|---|---|---|
| | В пояснительную записку внести требования к компетенциям специалиста:<br>академические – АК-1, АК-2, АК-3, АК-4, АК-5, АК-6, АК-7, АК-8, АК-9;<br>социально-личностные – СЛК-1, СЛК-2, СЛК-3, СЛК-4, СЛК-5, СЛК-6;<br>профессиональные – ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-11, ПК-12, ПК-13, ПК-14, ПК-15, ПК-16, ПК-17, ПК-18, ПК-19. | |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования (протокол № 9 от 27.05. 2016г.)

Заведующий кафедрой

| канд. физ.-мат. наук, доцент | | В.С. Романчик |
|---|---|---|
| (ученая степень, ученое звание) | (подпись) | (И.О.Фамилия) |

Зам. УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

| канд. физ.-мат. наук, доцент | | Д.Г. Медведев |
|---|---|---|
| (ученая степень, ученое звание) | (подпись) | (И.О.Фамилия) |