

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
А.М. Толстик

05.07.2016
Регистрационный № УД-16/44

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебная программа для учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

2016 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1 31 03 02-2013, типовой учебной программы по дисциплине «Аналитическая геометрия», регистрационный № ТД–G 551/тип – 2016, . учебного плана, регистрационный № G31-136/уч. от 30.05.2013

СОСТАВИТЕЛИ:

Сергей Гаврилович Кононов – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Константин Станиславович Филипович – старший преподаватель кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 11 от 19.05.2016)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 31.05.2016)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Аналитическая геометрия относится к циклу специальных дисциплин (государственный компонент) и является одной из основных дисциплин, которые читаются обучающимся по специальности 1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование». Понятия и основные факты аналитической геометрии используются при изучении многих математических дисциплин, в первую очередь таких, как «Алгебра», «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Теоретическая механика».

Главными **целями** дисциплины «**Аналитическая геометрия**» являются:

- освоение новых по сравнению с элементарной геометрией пространств: многомерных евклидовых, аффинных и изучение фигур первого и второго порядков в этих пространствах;
- овладение основным методом исследования в аналитической геометрии – методом координат;
- приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области аналитической геометрии для их использования при изучении других математических дисциплин.

Для достижения этих целей решаются следующие **задачи**.

- Определяется понятие геометрического вектора как класса эквивалентных направленных отрезков. Излагается векторная алгебра, используемая в дальнейшем как основной инструмент построения аналитической геометрии.
- Всесторонне изучаются фигуры первого и второго порядков, являющиеся основными объектами исследования в аналитической геометрии.
- Вводятся основные типы геометрических преобразований и проводится идея рассмотрения различных геометрий как совокупности инвариантов той или иной группы преобразований.

В начале изучения дисциплины с целью сохранения преемственности со школьной геометрией рассмотрение ограничивается трехмерным евклидовым пространством E^3 . При этом векторы в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , прямые на евклидовой плоскости E^2 , плоскости и прямые в пространстве E^3 изучаются всесторонне с точки зрения высшей математики. Рассматриваются фигуры второго порядка на плоскости E^2 и в пространстве E^3 .

Далее изучаются аффинные преобразования и движения плоскости E^2 и пространства E^3 , используемые, в частности, в современных графических программах компьютерной геометрии.

Заключительная часть аналитической геометрии посвящена многомерным аффинным и евклидовым пространствам. Определяются и изучаются фигуры первого и второго порядков в вещественных аффинных и евклидовых пространствах; аффинные преобразования и движения; аффинная и евклидова геометрия.

В соответствии с образовательным стандартом в результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

- векторы в E^3 , операции над векторами;

- эллипсы, гиперболы, параболы, эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, их канонические уравнения и свойства;
- основные понятия теории кривых и поверхностей, типичные примеры кривых и поверхностей;
- понятия n -мерного аффинного и евклидова пространств; аффинные реперы и координаты точек; k -мерные плоскости и фигуры второго порядка, группы геометрических преобразований;

уметь:

- выполнять операции над векторами; записывать общие и параметрические уравнения плоскостей в различных пространствах, определять их взаимное расположение; находить расстояния между плоскостями;
- по общему уравнению фигуры второго порядка в E^2 и E^3 определять ее тип, размеры, расположение относительно системы координат; приводить общее уравнение фигуры второго порядка в аффинном пространстве к нормальному виду;

владеть:

- методом координат при решении основных задач аналитической геометрии;
- методами и вычислительным аппаратом алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений, применяемыми в геометрии.

Преподавание аналитической геометрии должно строиться таким образом, чтобы обучающийся приобретал следующие компетенции специалиста:

- АК-1. Умение применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.
- АК-3. Владение исследовательскими навыками.
- АК-4. Умение работать самостоятельно.
- АК-5. Способность порождать новые идеи (креативность).
- ПК-8. Способность работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой, разрабатывать и использовать современное учебно-методическое обеспечение.

На изучение аналитической геометрии отводится 244 часа, из них аудиторных – 106, лекций – 54 часа, практических занятий – 52 часа;

в первом семестре 72 часа, лекций – 36 часов, практических занятий – 32 часа, УСР – 4 часа, формы отчетности – экзамен;

во втором семестре 34 часа, лекций – 18 часов, практических занятий 12 часов, УСР – 4 часа, формы отчетности – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение

- 1.1. Роль геометрии в математике и ее приложениях.
- 1.2. Предмет и методы аналитической геометрии.

Раздел 2. Векторы

- 2.1. Направленные отрезки. Векторы как классы эквивалентных направленных отрезков.
- 2.2. Сложение векторов, умножение векторов на числа, откладывание вектора от точки.
- 2.3. Проекции. Деление отрезка в данном отношении.
- 2.4. Линейная зависимость и независимость векторов, коллинеарные и компланарные векторы. Базисы и координаты векторов. Ориентация прямой, плоскости и пространства. Формулы преобразования координат векторов.
- 2.5. Скалярное произведение векторов.
- 2.6. Векторное произведение векторов.
- 2.7. Смешанное произведение векторов.
- 2.8. Формулы преобразования координат векторов

Раздел 3. Прямые и плоскости

- 3.1. Аффинные реперы (декартовы системы координат) на прямой, на плоскости и в пространстве. Ортонормированные реперы (прямоугольные декартовы системы координат). Полярные, сферические и цилиндрические системы координат. Формулы преобразования аффинных координат точек.
- 3.2. Фигуры и их уравнения.
- 3.3. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Определение взаимного расположения двух прямых на плоскости по их уравнениям. Пучок прямых. Формулы для вычисления расстояния от точки до прямой и величины угла между прямыми.
- 3.4. Различные виды уравнений плоскости в пространстве. Определение взаимного расположения двух плоскостей по их уравнениям. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Определение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве по их уравнениям. Формулы для вычисления расстояний от точки до прямой и от точки до плоскости в пространстве. Геометрический смысл линейных неравенств с двумя и тремя неизвестными.

Раздел 4. Фигуры второго порядка на плоскости и в пространстве

- 4.1. Эллипс – различные определения, каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет. Гипербола – определение, каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет, асимптоты. Директрисы эллипса и гиперболы. Парабола – каноническое уравнение, фокус и директриса. Параметрическое задание эллипса и гиперболы. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.
- 4.2. Общее уравнение фигуры второго порядка на плоскости, приведение его к каноническому виду.
- 4.3. Понятие фигуры второго порядка в пространстве, ее исследование с помощью сечений. Фигуры вращения, цилиндрические и конические фигуры

в пространстве. Эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды, эллиптические и гиперболические параболоиды. Цилиндры второго порядка – эллиптический, параболический, гиперболический. Конус второго порядка, конические сечения. Общее уравнение фигуры второго порядка в пространстве, приведение его к каноническому виду.

Раздел 5. Аффинные преобразования и движения

5.1. Определение, примеры и основные свойства аффинных преобразований плоскости и пространства.

5.2. Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием.

5.3. Координатная запись аффинного преобразования.

5.4. Определение, примеры и основные свойства движений плоскости и пространства. Координатная запись движения. Описание движений плоскости E^2 и пространства E^3 .

Раздел 6. Аффинные пространства

6.1. Понятие аффинного пространства. Аффинные реперы и координаты точек в n -мерном аффинном пространстве A^n .

6.2. Понятие k -мерной плоскости в пространстве A^n , аффинная оболочка множества точек. Аффинно независимые системы точек. Типы взаимного расположения двух плоскостей в аффинном пространстве, характеристика пары плоскостей.

6.3. Общие и параметрические уравнения плоскостей в пространстве A^n . Параллелепипеды и симплексы в вещественных аффинных пространствах.

6.4. Аффинные отображения. Изоморфизм аффинных пространств. Аффинные преобразования. Геометрия аффинной группы.

6.5. Фигуры второго порядка (квадрики) в вещественном аффинном пространстве A^n . Пересечение квадрики с прямой. Асимптотические направления. Линии эллиптического, гиперболического, параболического типов на плоскости E^2 . Центры квадрик. Диаметральные плоскости квадрики. Диаметры линий второго порядка. Приведение уравнений квадрики к нормальному виду с помощью преобразования координат. Аффинная классификация квадрик в вещественном аффинном пространстве A^n .

Раздел 7. Евклидовы пространства

7.1. Понятие евклидова векторного пространства. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Ортогональное дополнение подпространства. Матрица Грама системы векторов.

7.2. Понятие n -мерного евклидова точечного пространства E^n . Ортонормированные реперы. Плоскости в пространстве E^n , ортогональность плоскостей.

7.3. Шары, сферы, симплексы, параллелепипеды в пространстве E^n . Расстояние между двумя плоскостями. Объем параллелепипеда и симплекса. Движения пространства E^n и евклидова геометрия. Приведение уравнения квадрики в пространстве E^n к каноническому виду. Исследование поверхности второго порядка в пространстве E^3 по общему уравнению.

Учебно-методическая карта по дисциплине «Аналитическая геометрия»

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов			Количество часов УСР	Литература	Форма контроля знаний
		лекции	практические занятия	лабораторные занятия			
1	2	3	4	5	6	7	8
1 семестр							
1	<i>Введение</i>	1					
2	<i>Векторы</i>	12	10				
2.1	Вектор как класс эквивалентных направленных отрезков	2				[1], [3], [4]	Опрос
2.2	Сложение векторов, умножение векторов на числа	2	4			[1], [4]	Опрос
2.3, 2.4	Проекция. Линейная зависимость векторов. Базисы и координаты векторов	2	2			[1], [3], [4]	Опрос
2.5	Скалярное произведение векторов	2	2			[1], [4]	Опрос
2.6, 2.7, 2.8	Векторное и смешанное произведения векторов. Формулы преобразования координат	4	2			[1], [4], [5]	Контр. работа
3	<i>Прямые и плоскости</i>	8	14		2		
3.1, 3.2	Аффинные реперы и координаты точек. Фигуры и их уравнения	2	2			[1], [4], [5]	Опрос
3.3	Различные виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой	3	6			[1], [4], [5]	Опрос
3.4	Уравнения прямых и плоскостей в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве	3	6		2	[1], [4], [5]	Контр. работа
4	<i>Фигуры второго порядка на плоскости и в пространстве</i>	8	8		2		
4.1	Эллипс, гипербола, парабола	2	2			[1], [4]	Опрос

1	2	3	4	5	6	7	8
4.2	Фокусы и директрисы эллипса, гиперболы, параболы. Параметрические и полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Классификация фигур второго порядка на плоскости	4	4		2	[1], [4], [5]	Контр. работа
4.3	Фигуры второго порядка в пространстве. Фигуры вращения. Цилиндрические и конические фигуры	2	2			[1], [4], [5]	Инд. задания
5	<i>Аффинные преобразования и движения</i>	7	4				
5.1, 5.2, 5.3	Определение, основные свойства, координатная запись аффинных преобразований плоскости и пространства	5	2			[1], [3], [4]	Опрос
5.4	Определение, основные свойства, координатная запись движений плоскости и пространства	2	2			[1], [3], [4]	Контр. работа
2 семестр							
6	<i>Аффинные пространства</i>	11	4		2		
6.1	Понятие аффинного пространства, координаты точек в аффинном пространстве	2				[1], [3], [4]	
6.2, 6.3	Плоскости в аффинном пространстве, их уравнения и взаимное расположение	4	2		2	[1], [3], [4]	Контр. работа
6.4	Аффинные отображения. Изоморфизмы и автоморфизмы аффинных пространств	3				[1], [4], [5]	Опрос
6.5	Фигуры второго порядка в вещественных аффинных пространствах	2	2			[1], [4], [5]	Инд. задание
7	<i>Евклидовы пространства</i>	7	4		2		
7.1	Понятие евклидова векторного и евклидова точечного пространства, ортонормированные реперы, ортогональность плоскостей	2				[1], [3], [4]	Опрос
7.2	Евклидовы точечные пространства. Расстояния и углы между плоскостями	2	2		2	[1], [3], [4]	Контр. работа
7.3	Понятие квадратики, пересечение квадратики с прямой. Аффинная	3	2			[1], [3],	Инд. зада-

	классификация квадрик в n -мерном вещественном аффинном пространстве					[4]	ние
	Итого	54	44		8		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. *Кононов С.Г.* Аналитическая геометрия: учебное пособие. – Минск: БГУ, 2014. – 238 с.
2. *Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 302 с.
3. *Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 2. – 269 с.
4. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник. – М., Наука, 1979. – 512 с.
5. *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие. – М., Наука, 1976. – 384 с.
6. *Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С.* Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. – Минск: Университетское, 1989. – 285 с.

Дополнительная литература

1. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1986. – 303 с.
2. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия: учебник. – М., Наука, 1970. – 527 с.
3. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1973. – 751 с.
4. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1979. – 336 с.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

В процессе *самостоятельной работы* по дисциплине «Аналитическая геометрия» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и практических занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;
- подготовка к различным формам промежуточной и итоговой аттестации (практической, лабораторной и контрольной работе, коллоквиуму, зачету, экзамену);
- поиск и изучение понятий и фактов из параллельно читаемых курсов «Алгебра», «Математический анализ», необходимых для усвоения дисциплины «Аналитическая геометрия»;
- выполнение домашних заданий; самостоятельное выполнение заданий для практических работ;
- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

Рекомендуется следующее *распределение часов* отведенных на самостоятельную работу (66 часов) по дисциплине «Аналитическая геометрия»:

Раздел 1. Введение (1 час).

Раздел 2. Векторы (10 часов).

Раздел 3. Прямые и плоскости (10 часов).

Раздел 4. Фигуры второго порядка на плоскости и в пространстве (10 часов).

Раздел 5. Аффинные преобразования и движения (10 часов).

Раздел 6. Аффинные пространства (10 часа).

Раздел 7. Евклидовы пространства (15 часа).

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Аналитическая геометрия», является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается в процессе практических занятий, при выполнении контрольных работ, тестовых заданий, на коллоквиумах и при сдаче зачетов и экзаменов.

Управляемая самостоятельная работа (УСР) студентов – это самостоятельная работа, выполняемая по заданию преподавателя, при его методическом руководстве и контроле.

Целью УСР аналитической геометрии является целенаправленное обучение студентов основным навыкам и умениям для успешного усвоения теоретического и практического учебного материала по изучаемой дисциплине.

К *организационным формам* проведения УСР по дисциплине «Аналитическая геометрия» относится аудиторная деятельность на практике.

ских занятиях. **Видами отчетности** УСР являются: контрольные работы, коллоквиумы, отчеты по практическим работам.

Контроль УСР по дисциплине «*Аналитическая геометрия*» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- экспресс-опроса на аудиторных занятиях;
- контрольной работы;
- тестового задания;
- коллоквиума;
- защиты учебных заданий по практическим работам.

Учет результатов контроля текущей успеваемости студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

**Примерные перечни заданий
по управляемой самостоятельной работе студентов**

Контрольная работа №1

Вариант 1

1. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC . Выразите векторы $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.
2. Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – правый ортонормированный базис. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Найдите: 1) координаты вектора $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; 2) величину угла между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$; 3) длину вектора $\vec{c} \times \vec{b}$.
3. Найдите длину вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарные векторы такие, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 5$; векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны; величина угла между $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равна $\frac{\pi}{3}$.
4. Найдите объем параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$, если объем тетраэдра $ACB'D'$ равен 10.

Вариант 2

1. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC , которые пересекаются в точке M . Выразите векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{MA_1}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{MB_1}$.
2. Даны векторы $\vec{a}(2, 4, 5)$, $\vec{b}(-1, 2, 3)$, $\vec{c}(2, -2, 1)$ своими координатами в правый ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Найдите: 1) координаты вектора $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$; 2) величину угла между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$; 3) векторное произведение $\vec{c} \times \vec{d}$.
3. Найдите длину вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарные векторы такие, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 5$; величины углов между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, также между $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны $\frac{\pi}{3}$.
4. Объем параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$ равен 10. Каков объем тетраэдра $ACB'D'$?

Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Дана прямая $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$. Для прямой Δ найдите: направляющий вектор; нормальный вектор; угловой коэффициент; общее уравнение. Напишите уравнения прямых Δ_1 и Δ_2 , параллельных Δ и отстоящих от Δ на расстояние $d = \sqrt{13}$. Напишите уравнение прямой Δ_3 , перпендикулярной Δ и проходящей через точку $M_1(2, -3)$.

2. Покажите, что прямые

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ и } \Delta_2: \begin{cases} x = 10 + 2u \\ y = 1 - 2u \\ z = -1 - 3u \end{cases} \text{ пересекаются. Найдите точку пересечения}$$

и напишите уравнение плоскости, в которой лежат данные прямые.

3. Дано уравнение стороны правильного треугольника $x + y - 1 = 0$ и координаты одной из вершин $A(2, 0)$. Составьте уравнения двух других сторон.

4. Луч света проходит через точку $M_1(1, -1, -1)$ и, отразившись от плоскости $\pi: x - y - z - 6 = 0$, проходит через точку $M_2(-1, 2, 0)$. Напишите уравнения прямых, содержащих соответственно лучи падающий и отраженный.

Вариант 2

1. Дана прямая $\Delta: 3x + 2y - 6 = 0$. Для прямой Δ найдите: направляющий вектор; нормальный вектор; угловой коэффициент; параметрические уравнения; напишите уравнения прямых Δ_1 и Δ_2 , параллельных Δ и отстоящих от Δ на расстояние $d = \sqrt{13}$; напишите уравнение прямой Δ_3 , перпендикулярной Δ и проходящей через точку $M_1(2, -3)$.

2. Покажите, что плоскости: $\pi_1: 2x - 7y + z - 12 = 0$ и $\pi_2: x + y + 5z - 6 = 0$ пересекаются по прямой. Напишите параметрические уравнения этой прямой.

3. Даны уравнения основания равнобедренного треугольника: $x + 2y - 2 = 0$ и одной из боковых сторон: $2x + y - 1 = 0$. Найдите уравнение другой боковой стороны при условии, что она проходит через точку $M_1(-2, -1)$.

4. Луч света проходит через точку $M_1(1, -1, -1)$ и, отразившись от плоскости $\pi: x - y - z - 6 = 0$, проходит через точку $M_2(-1, 2, 0)$. Напишите уравнения прямых, содержащих соответственно лучи падающий и отраженный.

Контрольная работа №3

Вариант 1

1. Отображения плоскости $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2, M(x, y) \mapsto M(x', y')$, задаются в некотором аффинном репере формулами:

$$1) f: \begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = x - 1; \end{cases} \quad 2) f: \begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = x - 1; \end{cases} \quad 3) f: \begin{cases} x' = 2x - 6y + 5, \\ y' = -x + 3y - 1; \end{cases}$$

$$4) f: \begin{cases} x' = x + 3y - 1, \\ y' = 2x - 6y + 5; \end{cases} \quad 5) f: \begin{cases} x' = \frac{1}{x} - y - 1, \\ y' = y + \frac{1}{x} + 5. \end{cases}$$

Укажите те из них, которые являются аффинными преобразованиями.

2. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5, \\ y' = 4x - 3y - 2. \end{cases}$$

В какие прямые перейдут при этом преобразовании:

- 1) оси Ox и Oy ;
- 2) прямая $2x + 3y + 5 = 0$;
- 3) прямая $4x - 3y - 2 = 0$?

3. Найдите инвариантные прямые аффинного преобразования $f: \begin{cases} x' = 2y + 5, \\ y' = 8x - 1. \end{cases}$

4. Выберите формулы, задающие симметрию f плоскости $\mathbb{E}^2$ относительно данной прямой $l: 2x - y + 5 = 0$.

$$1) f: \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{cases}; \quad 2) f: \begin{cases} x' = \frac{7}{5}x - \frac{1}{5}y + 1, \\ y' = y \end{cases};$$

$$3) f: \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}; \quad 4) f: \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 4 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}.$$

5. Пусть l и l_1 а также m и m_1 – пары параллельных прямых плоскости $\mathbb{E}^2$. О количестве аффинных преобразований плоскости, переводящих первую пару во вторую, можно сказать следующее:

- 1) такое преобразование единственное;
- 2) таких преобразований не существует;

- 3) таких преобразований бесконечно много;
 4) ответ зависит от выбора пар параллельных прямых.

Вариант 2

1. Отображения плоскости $f: \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2, M(x, y) \mapsto M(x', y')$, задаются в некотором аффинном репере формулами:

$$1) f: \begin{cases} x' = 2x + 1, \\ y' = x - 1, \end{cases} \quad 2) f: \begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = y - 1; \end{cases} \quad 3) f: \begin{cases} x' = 2x - 6y + 5, \\ y' = -3x + 9y - 1; \end{cases}$$

$$4) f: \begin{cases} x' = -x + 3y - 1, \\ y' = 2x + 6y + 5; \end{cases} \quad 5) f: \begin{cases} x' = x^2 - y - 1, \\ y' = y + x^2 + 5. \end{cases}$$

Укажите те из них, которые являются аффинными преобразованиями.

2. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = 3x - 7y + 6, \\ y' = 2x - 5y - 2. \end{cases}$$

В какие прямые перейдут при этом преобразовании:

- 1) оси Ox и Oy ;
 2) прямая $3x - 7y + 6 = 0$;
 3) прямая $2x - 5y - 2 = 0$?

3. Найдите инвариантные прямые аффинного преобразования f :

$$f: \begin{cases} x' = y - 9, \\ y' = 9x + 1. \end{cases}$$

4. Пусть Oxy – прямоугольная система координат на плоскости. Напишите формулы, задающие композицию двух движений: $f = f_2 \circ f_1$, где f_1 – симметрия плоскости относительно оси Ox , f_2 – симметрия плоскости относительно прямой, проходящей через начало координат и составляющей угол 120° с осью Ox .

5. Отметьте номера истинных утверждений:

- 1) для любых двух трапеций на плоскости $\mathbf{E}^2$ существует аффинное преобразование плоскости, переводящее одну в другую;
 2) для любых двух прямоугольных трапеций на плоскости $\mathbf{E}^2$ существует аффинное преобразование плоскости, переводящее одну в другую;
 3) для любых двух равнобоковых трапеций на плоскости $\mathbf{E}^2$ существует аффинное преобразование плоскости, переводящее одну в другую;
 4) любую трапецию можно перевести аффинным преобразованием в равнобоковую трапецию.

Контрольная работа №4

Вариант 1

1. Запишите уравнение прямой в аффинном пространстве $\mathbf{R}^4$, проходящей через точки

$A = (2, 5, 1, 5)$ и $B = (-4, 5, -3, 2)$. Найдите пересечение этой прямой и гиперплоскости $\pi: 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 5$.

2. Даны плоскости $B^2 = M_0 + W^2$ и $P^2 = N_0 + U^2$ в аффинном пространстве $\mathbf{R}^4$.

Здесь $M_0 = (-3, 0, 0, -4)$, $W^2 = L((3, 1, 0, 3), (2, 0, 1, 2))$;

$N_0 = (1, -1, 0, 0)$, $U^2 = L((0, 3, 1, 0), (1, -2, 0, 1))$.

Определите взаимное расположение этих плоскостей.

3. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ найдите ортогональную проекцию точки $M_0 = (2, -1, 3, 1)$ на плоскость

$$\pi: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

4. Пусть $(O, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ – ортонормированный репер в евклидовом пространстве E^n . Найдите расстояние от начала координат до гиперплоскости, которая отсекает на координатных осях отрезки величиной $b_1, \dots, b_n$.

Вариант 2

1. Найдите размерность плоскости, являющейся аффинной оболочкой точек

$A = (1, 1, -2, 2)$, $B = (-3, 1, 4, 4)$, $C = (-1, 2, 3, 6)$, $D = (0, 2, -1, 3)$, $E = (-1, 0, 1, 2)$ в аффинном пространстве $\mathbf{R}^4$. Напишите общие уравнения этой плоскости.

2. Даны плоскости $B^2 = M_0 + W^2$ и $P^2 = N_0 + U^2$ в аффинном пространстве $\mathbf{R}^4$.

Здесь $M_0 = (2, 5, 1, 5)$, $W^2 = L((1, 3, -1, 2), (2, 4, -3, 5))$;

$N_0 = (0, -3, -1, -2)$, $U^2 = L((1, 5, 3, 5), (2, 4, -6, 1))$.

Определите взаимное расположение этих плоскостей.

3. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ найдите ортогональную проекцию точки $M_0 = (1, -2, 3, -1)$ на прямую

$$\Delta: \begin{cases} x_1 = 6 + t, \\ x_2 = -10 - t, \\ x_3 = 4 + 2t, \\ x_4 = -6 - 3t. \end{cases}$$

1. Пусть $(O, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ – ортонормированный репер в евклидовом пространстве E' .
Найдите расстояние от начала координат до гиперплоскости, которая отсекает на координатных осях отрезки величиной $b_1, \dots, b_n$.

Тест №1

1. Даны точки: $A(1; -3)$, $B(5; 7)$. Найдите середину C отрезка AB .	1) $C(0;0)$; 2) $C(3; 0)$; 3) $C(-3; 4)$; 4) $C(3; 2)$.
2. Даны два вектора: $\vec{a}(1;3;4)$ и $\vec{b}(-2;1;2)$. Найдите вектор $\vec{x}$ такой, что $4\vec{a} - \vec{b} - \vec{x} = 0$.	1) $\vec{x}(3;5;10)$; 2) $\vec{x}(6;11;14)$; 3) $\vec{x}(3;5;7)$; 4) $\vec{x}(6;5;9)$.
3. Угол между векторами $\vec{m}(1; 1; 1)$ и $\vec{n}(2; 1; 3)$ равен:	1) $\arccos 2\sqrt{\frac{3}{14}}$; 2) 90° ; 3) 45° ; 4) $\arccos \frac{1}{3}$.
4. Вычислите длину вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a}(2;1;0)$, $\vec{b}(0;-1;2)$.	1) $\sqrt{24}$ 2) $\sqrt{37}$ 3) $\sqrt{53}$ 4) $\sqrt{75}$
5. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(9,1,4)$, $\vec{b}(7,-5,8)$, $\vec{c}(4,0,0)$, отложенных от некоторой точки.	1) 112; 2) 448; 3) 224; 4) 117.
6. В декартовой системе координат Oxy общее уравнение прямой, для которой известны точка $A(1, -3)$ и направляющий вектор $\vec{a}(2,1)$, имеет вид:	1) $2x + y - 5 = 0$; 2) $x + 2y - 3 = 0$; 3) $x - 2y - 7 = 0$; 4) $x - 2y - 5 = 0$.
7. Найдите координаты точки пересечения прямой $x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = 5 - 3t$ с плоскостью Oxz .	1) $(5,0,0)$; 2) $(0,0,7)$; 3) $(7,0,-4)$; 4) $(9,1,0)$.
8. Прямые на евклидовой плоскости, заданные в прямоугольной системе координат уравнениями $x + 2y - 1 = 0$ и $2x + ky - 5 = 0$, параллельны, если k равно:	1) 4; 2) -4; 3) 2; 4) 1.

Тест №2

1.	Если расстояние между параллельными плоскостями с уравнениями $2x-y+2z+D=0$ и $2x-y+2z-4=0$ равно 4, то значение D равно:	1) – 12 или – 4; 2) – 12 или 4; 3) – 16 или 32; 4) 8 или – 16; 5) 12 или 4.
2.	Фигура на плоскости, заданная в некотором аффинном репере уравнением $x^2+2y^2-2x+8y-7=0$, является:	1) эллипсом; 2) гиперболой; 3) параболой; 4) парой пересекающихся прямых; 5) парой параллельных прямых.
3.	Укажите координаты неподвижной точки аффинного преобразования $\begin{cases} x' = 3x + 4y + 6, \\ y' = 4x + 3y - 12. \end{cases}$	1) (1,0); 2) (1,4); 3) (5, – 4); 4) (3,4) 5) (4,5).
4.	В евклидовом пространстве E^5 заданы гиперплоскость Π и точка P_0 . $\Pi: 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 54 = 0$ $P_0(-3, 3, 1, 5, -2)$ Чему равно расстояние от точки P_0 до гиперплоскости Π ?	1) 0; 2) 12; 3) 3; 4) 8; 5) 6.
5.	Если в аффинном пространстве A^4 прямая $x_1 = -2 + 3t, x_2 = 3 - 2t, x_3 = -1 + 4t, x_4 = 4 - t$ параллельна гиперплоскости $4x_1 - 2x_2 + Cx_3 - 8x_4 + 1 = 0$, то значение C равно:	1) – 6; 2) – 3; 3) 6; 4) 3; 5) 12.
6.	В пространстве A^5 системой уравнений задана плоскость. Какова размерность плоскости? $-4x_1 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -2$ $4x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2$ $8x_1 - 3x_3 - x_5 = 0$	1) 0; 2) 4; 3) 2; <u>4) 3;</u> 5) 1.
7.	Эллипс задан в прямоугольной декартовой системе координат Oxy уравнением $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$. Найдите фокусы эллипса.	1) $F_1(-\sqrt{35}; 0)$ и $F_2(\sqrt{35}; 0)$; 2) $F_1(0; -5)$ и $F_2(0; 5)$; 3) $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$; 4) $F_1(0; -\sqrt{10})$ и $F_2(0; \sqrt{10})$; 5) $F_1(-3\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(3\sqrt{5}; 0)$.

8.	Фигура в пространстве E^3, заданная в декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{10} = 0$, является:	1) однополостным гиперболоидом; 2) парой параллельных плоскостей; 3) парой пересекающихся плоскостей; 4) гиперболическим параболоидом; 5) гиперболой.
9.	Длина дуги кривой $\begin{cases} x = 2 + 16\sin t, \\ y = -8 + 16\cos t, \end{cases} t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{12} \right],$ равна:	1) 2π; 2) 3π; 3) 6π; 4) 4π; 5) 12π.
10.	15. Прямая является касательной к кривой $x = t, y = t^2 + 1, z = t^3$ в точке $M(0,1,0)$. Направляющим вектором прямой является вектор с координатами:	1) (1,0,2); 2) (2,0,0); 3) (0,2,1); 4) (0,0,1) 5) (3,4,5).

Индивидуальные задания

1. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

2. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$4x^2 + 12xy - y^2 - 8x - 12y - 5 = 0.$$

3. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 110x - 230y - 475 = 0.$$

4. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$5y^2 + 12xy - 12x - 22y - 19 = 0.$$

5. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 8x - 6y - 1 = 0.$$

6. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0.$$

7. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0.$$

8.. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0.$$

9. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$$

10. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0.$$

11. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$6x^2 - 4xy + 9y^2 - 8x + 16y - 2 = 0.$$

12. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

13. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$4x^2 + 12xy - y^2 - 8x - 12y - 5 = 0.$$

14. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0.$$

15. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$5y^2 + 12xy - 12x - 22y - 19 = 0.$$

16. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$$

17. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 116 = 0.$$

18. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y + 224 = 0.$$

19. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

20. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$$

21. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$$3x^2 + 4xy + 12x + 16y - 36 = 0.$$

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)*
Дифференциальные уравнения	Дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется. Протокол №11, 19.05.2016
Алгебра	Высшей алгебры и защиты информации	нет	Вносить изменения не требуется. Протокол №11, 19.05.2016
Математический анализ.	Теории функций	нет	Вносить изменения не требуется. Протокол №11, 19.05.2016
Теоретическая механика	Теоретической и прикладной механики	нет	Вносить изменения не требуется. Протокол №11, 19.05.2016

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ*

на ____ / ____ учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № ____ от _____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета/Зав.общеуниверситетской кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)