БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
Белорусского государственного университета

_____ А.Л. Толстик
(подпись)

31 июля 2015 г.
(дата утверждения)

Регистрационный № УД-1578/уч.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 08 Математика и информационные технологии

2015 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования ОСВО 1–31 03 08 – 2013, 30.08.2013 и учебного плана G31-134/уч., 30.05.2013 специальности 1–31 03 08 Математика и информационные технологии.

СОСТАВИТЕЛИ:
В.П. Супрун – доцент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат технических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

П.Н. Бибило – заведующий лабораторией логического проектирования Объединенного института проблем информатики (ОИПИ) НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор.

Кафедра информационных технологий Учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет»

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 9 от 25.05.2015);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 29.06.2015 г.)

Пояснительная записка

В настоящее время развитие математической логики сопровождается увеличением ее роли в математике и вычислительной технике. Основными задачами математической логики являются изучение математических доказательств и вопросов оснований математики. Математическая логика органически связана с математической кибернетикой (математическая теория управляющих систем, применение ЭВМ для доказательства теорем, исследование естественных и искусственных языков, логическое проектирование цифровой аппаратуры), а также с программированием.

Учебная дисциплина состоит из введения, четырех основных частей (алгебра высказываний, исчисление высказываний, логика предикатов, исчисление предикатов) и приложения.

В первой части учебной дисциплины излагаются основные понятия алгебры высказываний. Дается определение формул и функций алгебры высказываний. Приводятся основные равносильности алгебры высказываний. Формулируется задача минимизации функций алгебры высказываний. Приводятся методы минимизации. Рассматривается приложения алгебры высказываний к решению задач анализа и синтеза релейно-контактных, контактных схем и схем из функциональных элементов.

Во второй части дисциплины дается определение исчисления высказываний (символы, аксиоматика, правила вывода). Рассматривается вывод из гипотез, формулируется теорема дедукции. Большое внимание уделяется вопросам непротиворечивости и полноты исчисления высказываний. Доказывается независимость системы аксиом.

В третьей части учебной дисциплины дается определение $n-$местного предиката. Вводятся понятия кванторов всеобщности и существования, формул логики предикатов. Также определяются приведенные и нормальные формулы логики предикатов. Формулируется проблема разрешения логики предикатов.

В четвертой части дается определение исчисления предикатов (символы, аксиоматика, правила вывода). Особое внимание уделяется правилу связывания квантором. Рассматривается связь с исчислением высказываний, а также непротиворечивость и полнота исчисления. Формулируется закон двойственности формул.

В качестве приложения математической логики рассматриваются задачи анализа и синтеза машин Тьюринга.

Широко используются основные понятия дискретной математики и теории булевых функций.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- предмет математической логики;
- высказывания, операции над высказываниями;
- методы минимизации функций алгебры высказываний;
- применение алгебры высказываний;

– вывод формул исчисления высказываний;
– доказательство непротиворечивости и полноты исчисления;
– определение и свойства предикатов;
– вывод формул исчисления предикатов.

уметь:

– *минимизировать функции алгебры высказываний;*
– *синтезировать релейно-контактные и контактные схемы;*
– *выводить формулы исчисления высказываний;*
– *выводить формулы исчисления предикатов;*
– *синтезировать машины Тьюринга.*

владеть:

– *вопросами оснований математики (непротиворечивость, полнота и независимость аксиом);*
– *основными приемами минимизации функций алгебры высказываний в классе ДНФ и синтеза контактных схем;*
– *основными приемами вывода формул исчисления высказываний и исчисления предикатов.*

Рекомендуемая форма отчетности – экзамен

На изучение учебной дисциплины «Математическая логика» по специальности 1 – 31 03 08 Математика и информационные технологии отводится 166 часов, в том числе 72 часа аудиторных занятий, из них лекций – 36, практических – 30, УСР – 6 в 5 – м семестре.

Текущая аттестация по учебной дисциплине проводится в форме экзамена.

Учебная программа предназначена для студентов очной формы получения образования.

Содержание учебного материала

Раздел 1. Введение

В основе математической логики лежит формальная логика Аристотеля Стагирского (384 – 322 г.г. до нашей эры). Математическая логика – раздел математики, в котором изучаются математические доказательства и вопросы оснований математики. Предметом изучения математической логики являются различные математические теории. К числу вопросов оснований математики относятся, например, установление непротиворечивости, полноты и независимости выбранной системы аксиом (аксиоматики) некоторой математической теории.

Одним из наиболее замечательных достижений математической логики является разработка понятия общерекурсивной функции и формулировка тезиса Чёрча – Тьюринга о том, что это понятие является уточнением интуитивного понятия алгоритма. После этого уточнения появилась возможность обнаружить существование неразрешимых алгоритмических проблем в различных разделах математики. В 1900 году великий немецкий математик Давид Гильберт сформулировал 23 проблемы, одна часть которых к настоящему времени уже решена, а другая – нет.

Математическая логика органически связана с разделом математической кибернетикой, который называется математической теорией управляющих систем. Приложение алгебры высказываний к релейно-контактным схемам основано на том, что такой схеме можно поставить во взаимно-однозначное соответствие приведенную формулу алгебры высказываний. Впервые предложил использовать алгебру высказываний в теории релейно-контактных схем американский математик, инженер Клод Элвуд Шеннон (1916 – 2001).

Математическая кибернетика не только использует результаты, полученные в математической логике, но и стимулирует новые исследования и появление новых направлений.

Перспективным направлением в математической логике (в исчислении высказываний и в исчислении предикатов) является исследование возможности применения ЭВМ для доказательства теорем. Также важные работы с помощью математической логики проводятся по логическому исследованию естественных и искусственных языков, в программировании, а также при разработке методов искусственного интеллекта.

«Классическая» математическая логика состоит из следующих четырех разделов: алгебра высказываний, исчисление высказываний, логика предикатов и исчисление предикатов.

Раздел 2. Алгебра высказываний

Алгебра высказываний изучает высказывания и является первой из формальных логических теорий. Начало созданию алгебры высказываний положили работы английского математика Джорджа Буля (1815 – 1864).

Рассматриваются только такие высказывания, которые удовлетворяют закону исключенного третьего и закону противоречия, т.е. любое высказывание или истинно, или ложно и не может быть одновременно истинно и ложно.

Элементарные высказывания обозначаются большими буквами латинского алфавита $A, B, C, ..., X, Y, Z$, а их значения «истина» и «ложь» – буквами $И$ и $Л$, соответственно. Переменные, принимающие значения из множества $\{И, Л\}$, называются *переменными высказываниями* или *пропозиционными* переменными.

Операции, выполняемые над высказываниями и порождающие новые высказывания, называются *логическими*. К логическим операциям относятся: «отрицание» $\overline{A}$, «конъюнкция» $A \& B$, «дизъюнкция» $A \vee B$, «импликация» $A \to B$ и «эквивалентность» $A \sim B$.

Вводятся понятия функции и формулы. Отмечается, что каждая формула единственным образом реализует (представляет собой) функцию. В то же время для представления произвольной функции существует много формул, которые называются *равносильными*. Задача минимизации некоторой функции заключается в том, что данную функцию требуется представить самой простой (в том или ином смысле) формулой.

В качестве приложения алгебры высказываний рассматриваются вопросы анализа и синтеза релейно-контактных и контактных схем, а также схем из функциональных элементов.

Раздел 3. Исчисление высказываний

Исчисление высказываний является аксиоматической логической системой. Первая формулировка классического исчисления высказываний принадлежит немецкому философу, логику Готлобу Фреге (1848 – 1925).

Описание всякого исчисления включает в себе 1) описание символов; 2) определение формулы; 3) описание подмножества формул, которые называются *выводимыми.* Подмножество выводимых формул определяется рекурсивным образом: первоначально задается система исходных выводимым формул (аксиом), которая иначе называется *аксиоматикой*, а затем – правила вывода, с помощью которых из аксиом или ранее выведенных формул получаются новые (более сложные) выводимые формулы.

Развитие исчисления высказываний заключается в выводе (доказательстве) новых и еще более сложных формул. При этом рассматриваются вопросы непротиворечивости, полноты и независимости выбранной аксиоматики.

Раздел 4. Логика предикатов

Логика предикатов представляет собой дальнейшее развитие алгебры высказываний. Она содержит в себе всю алгебру высказываний и вводит в рассмотрение высказывания, отнесенные к предметам.

Вводятся понятия предикатов, кванторов всеобщности и существования $\forall x$ и $\exists x$, которые являются *двойственными* друг к другу. Доказывается утверждение, что знак отрицания над квантором можно ввести под знак квантора, заменив квантор на двойственный. Кванторы $\forall x$ и $\exists x$ относятся к переменной x или переменная x связана соответствующими кванторами. Предметная переменная, которая не связана никаким квантором, называется *свободной*.

Вводится понятие формулы, для которой весьма важным является выполнение следующих двух требований: 1) в каждой формуле свободные и связанные переменные должны обозначаться различными буквами; 2) если в некоторой формуле какой-нибудь квантор находится в области действия другого квантора, то переменные, связанные этими кванторами, должны быть обозначены различными буквами. Нарушение хотя бы одного из этих

требований приводит к *коллизии* переменных и выражение, содержащее коллизию переменных, не является формулой.

Формулы, в которых из логических операций имеются только отрицание, конъюнкция и дизъюнкция, причем отрицание относится только к предикатам или высказываниям, называются *приведенными*. Среди приведенных формул выделяется класс формул, которые называются *нормальными*. В записи нормальной формулы кванторы (если они есть) предшествуют всем остальным логическим символам. Доказывается утверждение, что для произвольной формулы логики предикатов существует равносильная ей нормальная формула.

Проблема разрешения для логики предикатов формулируется следующим образом: *указать единый, эффективный алгоритм для определения по произвольной формуле выполнима она или нет*. К настоящему времени доказано, что данная проблема для логики предикатов не разрешима, т.е. искомый в этой проблеме алгоритм невозможен. Это впервые доказал американский математик Алонзо Чёрч (1903 – 1995). Однако для некоторых частных типов формул проблема разрешения решается успешно.

Раздел 5. Исчисление предикатов

Исчисление предикатов содержит символы, из которых составляются формулы. Затем среди всех формул выделяют формулы, которые называются *выводимыми*. Выделение выводимых формул осуществляется путем указания 1) конечной системы исходных выводимых формул (аксиом); 2) правил вывода, позволяющих из выводимых формул получать новые выводимые формулы.

Правила вывода: правило заключения, правила подстановки в переменное высказывание и в переменный предикат, правило замены свободной предметной переменной, правило переименование связанных предметных переменных, первое и второе правила связывания квантором. Имеет также место производное правило связывания квантором. При выводе формул исчисления предикатов необходимо строго следить за тем, чтобы не было коллизии переменных. Выводимые формулы исчисления высказываний являются выводимыми в исчислении предикатов. Исчисление является непротиворечивым.

Формулы, не содержащие логической связки «импликация» и такие, что отрицание относится только к элементарным частям (переменным высказываниям или предикатам), называются *приведенными*. Для приведенной формулы A существует двойственная формула B, которая получается из формулы A путем изменения каждого из символов $\&, \vee, \forall x$ и $\exists x$ на двойственный. Теорема (закон двойственности): если формулы A и B эквивалентны, то двойственные им формулы также эквивалентны.

Раздел 6. Машины Тьюринга

Машина Тьюринга – математическое понятие, введенное как формальное уточнение интуитивного понятия алгоритма.

Последовательность элементарных действий называется алгоритмом, если ее можно реализовать на машине Тьюринга.

Машина Тьюринга состоит из следующих трех частей: неограниченная в обе стороны лента $Л$, разделенная на ячейки; управляющее устройство $УУ$; считывающая головка $СГ$.

С каждой машиной Тьюринга связаны два конечных алфавита: алфавит внешних символов $A = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$ и алфавит внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, ..., q_k\}$, где $m \geq 1$ и $k \geq 1$.

Машина Тьюринга работает в идеализированном дискретном времени. В любой момент времени t в каждой ячейке ленты записана одна из букв алфавита A (считается, что алфавит A содержит пустую букву a_0), $УУ$ находится в одном из состояний $q_i \in Q$ (q_1 – начальное состояние и q_0 – конечное (заключительное) состояние), $СГ$ обозревает ровно одну ячейку.

Работа машины Тьюринга состоит из тактов, в каждом из которых осуществляется определенное преобразование, суть которого состоит в 1) изменении состояния q_i в состояние q_l; 2) замене буквы a_j, записанной в обозреваемой ячейке, на букву a_p; 3) сдвиге $СГ$ на одну ячейку влево или вправо ($СГ$ может и не двигаться). Такое преобразование называется *командой* машины Тьюринга. Символически команда записывается так: $(a_j, q_i) \to (a_p, R, q_l)$, где $R \in \{Л, Н, П\}$.

Совокупность всех команд, которые выполняет машина Тьюринга, называется *программой*. Работа машины начинается с внутреннего состояния q_1 и прекращается, если машина перейдет в состояние q_0.

Рассматриваются задачи анализа и синтеза машин Тьюринга, связанных с реализацией алгоритмов преобразования двоичных векторов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

для специальности 1 – 31 03 08

Математика и информационные технологии

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Введение в математическую логику**	**2**	**2**					
1.1	Формальная логика Аристотеля. Геометрия Евклида. Вопросы оснований математики. Проблемы Давида Гильберта.	1	1					
1.2	Связь логики с математической кибернетикой и программированием	1	1					
2	**Алгебра высказываний**	**12**	**10**				**2**	Письменная контрольная работа
2.1	Высказывания, определение, примеры. Логические операции.	2						
2.2	Формулы, тавтологии. Равносильности, равносильные преобразования.	4	2					
2.3	Функции алгебры высказываний, минимизация ДНФ	4	4					
2.4	Релейно-контактные схемы, контактные схемы, схемы из функциональных элементов.	2	4					
3	**Исчисление высказываний**	**12**	**10**				**2**	Письменная контрольная работа

3.1	Аксиомы, правила вывода. Производные правила вывода.	2						
3.2	Выводимость из гипотез. Теорема дедукции.	4	4					
3.3	Монотонность, свойства эквивалентности.	2	2					
3.5	Непротиворечивость и полнота исчисления.	2	2					
3.6	Независимость системы аксиом.	2	2					
4	**Логика предикатов**	**4**	**2**					
4.1	Предикаты, кванторы. Формулы.	2						
4.2	Приведенные и нормальные формы. Проблема разрешения.	2	2					
5	**Исчисление предикатов**	**4**	**4**				**2**	Письменная контрольная работа
5.1	Аксиомы, правила вывода. Производное правило связывания квантором.	2						
5.2	Вывод формул исчисления предикатов, Доказательство теорем.	2	4					
6	**Машины Тьюринга**	**2**	**2**					
6.1	Определение. Анализ машин Тьюринга.	2						
6.2	Синтез машин Тьюринга, решение примеров.		2					
	ИТОГО	**36**	**30**				**6**	

Информационно-методическая часть

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Новиков П.С. Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 1984.

Дополнительная

1. Грис Д. Наука программирования. М.: Наука, 1984.
2. Карпов В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и дискретная математика. Мн.: Вышэйшая школа, 1977.
3. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
4. Логическое введение в математику / Под ред. А.А.Столяра, Мн.: Вышэйшая школа, 1991.

Общие рекомендации

На лекционных занятиях по дисциплине «Математическая логика» следует обратить особое внимание на новые (порой весьма неожиданные) для студентов обозначения и термины, их связь с уже известными математическими и алгоритмическими понятиями и обозначениями. Интенсивность подачи материала рекомендуется постепенно наращивать к концу семестра.

В силу различного уровня подготовки студентов к восприятию новых понятий рекомендуется проводить консультации и дополнительные занятия с отстающими студентами для повторного объяснения и закрепления сложного материала.

Текущий контроль усвоения теоретических знаний в течение семестра по учебной дисциплине «Математическая логика» рекомендуется осуществлять посредством проведения трех письменных контрольных работ по следующим темам: «Алгебра высказываний», «Исчисление высказываний», «Исчисление предикатов».

Успеваемость студентов в рамках дисциплины «Математическая логика» рекомендуется оценивать в конце семестра в форме экзамена.

Рекомендации по проведению практических занятий

На практических занятиях по дисциплине «Математическая логика» рекомендуется использовать задания, приведенные в учебном пособии Лаврова И.А. и Максимовой Л.Л. «Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов» (М.: Наука, 1984).

Рекомендуемые темы курсовых работ

1. Анализ формул алгебры высказываний на тавтологию.
2. Минимизация функций алгебры высказываний в классе ДНФ.
3. Реализация функций алгебры высказываний контактными схемами.
4. Формализация вывода формул исчисления высказываний.
5. Реализация двоичных сумматоров посредством машины Тьюринга.
6. Реализация устройства для умножения двоичных чисел посредством машины Тьюринга.

Темы контрольных работ

1. Алгебра высказываний.
   1.1. Построение таблицы истинности сложных высказываний.
   1.2. Анализ формул на тавтологию.
   1.3. Минимизация функций алгебры высказываний.
   1.4. Синтез релейно-контактных и контактных схем.
   1.5. Синтез схем из функциональных элементов.
2. Исчисление высказываний.
   2.1. Вывод формул исчисления высказываний.
   2.2. Доказательство секвенций (с помощью теоремы дедукции).
3. Логика предикатов, исчисление предикатов.
   2.1. Приведенные и нормальные формулы логики предикатов.
   2.2. Вывод формул исчисления предикатов.

Дополнительные рекомендации по изложению материала и организации внеаудиторной работы студентов

Для повышения качества усвоения материала ходе аудиторных занятий рекомендуется постоянно демонстрировать связь математической логики с программой по математике за 11 класс средней школы, используя для этого монографию Столяра А.А. «Логическое введение в математику» (Мн.: Высшая школа, 1971).

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	**Название кафедры**	**Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по изучаемой учебной дисциплине**	**Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)**
Дискретная математика	Кафедра математической кибернетики	Нет	Оставить содержание учебной дисциплины без изменения. Протокол заседания кафедры МК № 9 от 25.05.2015

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ
К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ на ____/____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры «Математической кибернетики» (протокол № от 201 г.)

Заведующий кафедрой
д-р ф.-м. н., профессор _____ _____
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
к. ф.-м. н., доцент _____ _____
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)