Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________________ А.Л. Толстик
“ 30 ” ______06________ 2017 г.
Регистрационный № УД-4633/уч.

ТЕОРИЯ РАЗБИЕНИЙ ЧИСЕЛ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине специализации для специальности
1-31 03 01 Математика (по направлениям)
направление специальности
1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

2017 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям), утвержденного 30.08.2013 г. и учебного плана № G31-140/уч. 2013 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Шлык Владимир Александрович – профессор кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации
(протокол № 9 от 26.04.2017)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 7 от 16.05.2017)

Зав.кафедрой ВАиЗИ /В.В. Беняш-Кривец/

/В.А. Шлык/

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Лежащая на стыке теории чисел и комбинаторики теория разбиений чисел является классической областью математики. В ее развитие внесли вклад крупнейшие математики. Разбиения чисел играют важную роль во многих областях математики и современной физики. Вторая половина XX века отмечена существенными новыми продвижениями в их изучении. В частности, автором дисциплины предложен полиэдральный подход в теории разбиений.

Программа дисциплины специализации «Теория разбиений чисел» составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования по специальности 1-31 03 01 «Математика» (по направлениям) и рассчитана на изучение в седьмом семестре.

Цель дисциплины специализации «Теория разбиений чисел»: изложить основы теории разбиений чисел и полиэдральный подход, приводящий к новым задачам в данной области.

Образовательная цель: знакомство с основными понятиями и результатами теории разбиений чисел, изучение современных методов решения классических и новых задач теории разбиений.

Развивающая цель: формирование у студентов понимания единства различных областей математики, развитие комбинаторного математического мышления, знакомство с техникой комбинаторных, алгебраических и геометрических доказательств, изучение методов решения конкретных математических задач, привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную математическую литературу.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Теория разбиений чисел»:

- ознакомить студентов с основными понятиями и методами теории разбиений чисел, такими, как граф Феррера, биективное доказательство тождеств, метод производящих функций;
- изучить классические и новые результаты теории разбиений чисел и методы их доказательства;
- развить у студентов комбинаторное мышление и общую математическую культуру;
- привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную математическую литературу.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

– основные понятия и результаты теории разбиений чисел;

– методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Коды, исправляющие ошибки»;

– алгоритмы решения задач по дисциплине «Теория разбиений чисел»;

уметь:

– проводить биективные доказательства с использованием обобщенного метода удвоения частей и графов Феррера;

– применять метод производящих функций;

– строить политопы разбиений малых чисел и определять их вершины;

владеть:

– основными навыками решения задач, связанных с разбиениями чисел;

– методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Теория разбиений чисел»;

– навыками использования комбинаторных, алгебраических и геометрических методов для проведения самостоятельных математических и междисциплинарных исследований.

Требования к академическим компетенциям специалиста

Специалист должен:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыки устной и письменной коммуникаций..

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

Требования к социально-личностным компетенциям специалиста

Специалист должен:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

Требования к профессиональным компетенциям специалиста

Специалист должен быть способен:

Научно-производственная деятельность

ПК-1. Планировать и проводить экспериментальные исследования.

ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Использовать веб-сервисы.

ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

Научно-исследовательская деятельность:

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики.

ПК-6. Использовать современные информационные.

ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой; Самостоятельно приобретать с помощь информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний.

ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

Организационно-управленческая деятельность:

ПК-18. Готовить доклады, материалы к презентациям.

Инновационная деятельность:

ПК-24. Работать с научной, технической и патентной литературой.

Дисциплина тесно связана с такими дисциплинами как «Алгебра и теория чисел».

Учебная программа предназначена для студентов 4 курса (7 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 128 часов, в том числе 72 часа аудиторных занятий. Распределение аудиторных часов по видам занятий: лекции – 36 часов, практические занятия – 32 часа, УСР – 4 часа. Текущая аттестация – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Основные понятия и тождества теории разбиений чисел.

История теории разбиений чисел. Разбиения чисел в математике и физике. Способы представления разбиений. Основные классы разбиений. Представление разбиений в виде графов и диаграмм Феррера. Сопряженные разбиения. Преимущества биективных доказательств. Примеры биективных доказательств равномощности множеств. Метод слияния-расщепления частей, пары Эйлера. Применение графов Феррера и методов слияния-расщепления частей для доказательства тождеств о разбиениях. Тождество Эйлера. Возможности обобщенного метода слияния-расщепления частей.

Тема 2. Классические методы и теоремы.

Теорема о числе разбиений на 2-различные части и ее биективное доказательство Брессо. Числовая пентагональная теорема Эйлера и ее доказательство Франклина. Значение пентагональной теоремы Эйлера. Конгруенции Рамануджана и их обобщения. Первое тождество Роджерса-Рамануджана (о разбиениях на 2-различные части) и попытки его биективного доказательства. Гипотеза Алдера, теорема Эндрюса. Теорема Шура (о разбиениях на 3-различные части) и ее доказательство Брессо. Рост числа разбиений и числа Фибоначчи. Асимптотика числа разбиений. Приближенные формулы Харди-Рамануджана и Радемахера для числа разбиений. Метод производящих функций и его применение для доказательства теоремы Эйлера и пентагональной теоремы Эйлера.

Формальные степенные ряды и бесконечные произведения. Понятие производящей функции. Форма записи производящих функций. Применение производящих функций для подсчета чисел разбиений из различных классов. Доказательства теоремы Эйлера и пентагональной теоремы Эйлера с помощью метода производящих функций. Применение метода производящих функций для доказательства тождеств Роджерса-Рамануджана и формулы Харди-Рамануджана. Разбиения чисел в современной физике и статистической механике.

Тема 3. Полиэдральный подход в теории разбиений разбиений.

Многогранники и политопы, способы их задания. Основные понятия теории выпуклых полиэдров: грани, фасеты, вершины, ребра, крайние лучи полиэдров. Теорема Каратеодори.

Определение политопа разбиений чисел. Простейшие свойства политопа разбиений. Описание фасет политопа разбиений. Свойства вершин политопа разбиений чисел. Достаточные и необходимые условия для вершин. Операции слияния частей разбиений и их свойства. Рюкзачные разбиения. Критерий рюкзачности. Связь рюкзачных разбиений с другими структурами аддитивной комбинаторики. Классы k-порожденных разбиений и их свойства.

Операции над разбиениями. Опорные вершины. Связь между фасетами политопа разбиений и лежащими на них вершинами. Смежность вершин.

Проблема распознавания вершин и ее сложность.

Метод вычисления вершин. Результаты вычисления вершин и новые проблемы теории разбиений чисел.

Открытые проблемы о фасетах и вершинах политопа разбиений чисел и возможные подходы к их решению.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8
1	**Основные понятия и тождества теории разбиений чисел.**	**4**	**4**				
1.1	Эйлер – основоположник теории разбиений чисел. Основные классы разбиений. Диаграммы Феррера. Сопряженные разбиения. Первое тождество Эйлера.	2	2				Проверка индивидуальных заданий
1.2	Биективные доказательства тождеств. Метод слияния-расщепления частей и его обобщение. Второе тождество Эйлера. Пары Эйлера и тождества.	2	2				Проверка индивидуальных заданий
2	**Классические методы и теоремы.**	**16**	**10**			**2**	
2.1	Число разбиений на супер-различные части. Биективное доказательство Брессо.	2	2				Проверка индивидуальных заданий
2.2	Числовая пентагональная теорема Эйлера, доказательство Франклина. Конгруенции Рамануджана.	2	2				Проверка индивидуальных заданий
2.3	Первое тождество Роджерса-Рамануджана и попытки получения	2					

	его биективного доказательства. Гипотеза Алдера. Теорема Шура, доказательство Брессо.						
2.4	Рост функции числа разбиений. Числа разбиений и числа Фибоначчи. Асимптотика числа разбиений. Приближенные формулы Харди-Рамануджана и Радемахера для числа разбиений.	2				2	Контрольная работа
2.5	Производящие функции. Применение производящих функций для подсчета чисел разбиений из различных классов.	2	2				Проверка индивидуальны х заданий
2.6	Доказательства теоремы Эйлера и пентагональной теоремы Эйлера с помощью метода производящих функций.	2	2				Проверка индивидуальны х заданий
2.7	Применение метода производящих функций для доказательства тождеств Роджерса-Рамануджана и формулы Харди-Рамануджана.	2	2				Проверка индивидуальны х заданий
2.8	Разбиения чисел в современной физике и статистической механике.	2					
3	**Полиэдральный подход в теории разбиений разбиений чисел.**	**16**	**18**			**2**	
5.1	Выпуклые многогранники и политопы, способы их задания. Граневое и вершинное описания политопов. Теорема Каратеодори.	2	2				Проверка индивидуальны х заданий
5.2	Грани, вершины, ребра, фасеты политопов.	2	2				Проверка индивидуальны х заданий
5.3	Определение политопа разбиений чисел и его простейшие свойства. Описание фасет политопа разбиений. Открытые проблемы о фасетах.	2	2				Проверка индивидуальны х заданий
5.4	Вершины политопа разбиений чисел и их свойства. Достаточные и	2	4				Проверка

	необходимые условия для вершин.						индивидуальных заданий
5.5	Операции над разбиениями. Опорные вершины. Свойства фасет, проходящих через заданную вершину политопа разбиений. Смежность вершин.	2	4				Проверка индивидуальных заданий
5.6	Рюкзачные разбиения. Критерий рюкзачности. Связь рюкзачных разбиений с другими комбинаторными структурами. Классы k-порожденных разбиений.	2	2			2	Контрольная работа
5.7	Открытые проблемы о вершинах. Проблема распознавания вершин политопа разбиений и ее сложность.	2					
5.8	Метод вычисления вершин. Результаты вычисления вершин. Проблема числа вершин политопа разбиений чисел.	2	2				Проверка индивидуальных заданий
	Итого	**36**	**32**			**4**	

ИНФОРМАЦИОННАЯ ЧАСТЬ

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G.E., Eriksson K. Integer Partitions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. 141 p.
2. Эндрюс Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. 256 с.
3. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. 424 с.
4. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2007. 144 с.
5. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники графы оптимизация (комбинаторная теория многогранников). Под ред. И.В. Викторенкова, С.П. Тарасова. – М.: Наука, 1981. 341 с.
6. Шлык В.А. Критерий представления разбиений чисел в виде выпуклой комбинации двух разбиений // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 109–114.
7. Врублевский А.С., Шлык В.А. Вычисление вершин политопов разбиений чисел // Информатика. 2015, № 4(48), 34-48

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

8. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 1. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. – 316 с.
9. Dickson, L.E. History of the Theory of Numbers, Vol. II: Diophantine Analysis. Washington, D.C.: Carnegie Inst. – 1919. – № 256 (reprinted: Dover, Mineola, New York, 2005). – xxv+803 p.
10. Харди Г. Двенадцать лекций о Рамануджане. М., Институт компьютерных исследований, 2002. -- 336 с.
11. Shlyk V.A. Polyhedral approach to integer partitions. // Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2014, Vol. 89, P. 113–128