УДК 517.927.75

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ШАЗИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННЫХ ПОЛЮСОВ

К. Г. Атрохов, В. И. Громак

Белорусский государственный университет, г. Минск
e-mail: kiryl.atrokhau@gmail.com, vgromak@gmail.com

1. Введение

В работах Пенлеве и Гамбье [1–3] изучены некоторые классы уравнений второго порядка

$$y'' = R(z, y, y')$$

и найдены 50 канонических уравнений, решения которых не имеют подвижных критических особых точек. Это свойство в настоящее время называют свойством Пенлеве. Наиболее существенными среди выделенных Пенлеве уравнений оказались шесть уравнений, которые в настоящее время называют его именем, а их решения — трансцендентами Пенлеве [4–6]. Уравнения Пенлеве определяют нелинейные специальные функции [7, 8].

Для уравнений высших порядков классификационная проблема Пенлеве оказалась очень трудной, и в настоящее время наиболее полные результаты получены лишь для полиномиальных уравнений высших порядков. Так уравнения вида

$$y''' = P(z, y, y', y''),$$

где $P(z, y, y', y'')$ — полином относительно y и ее производных, рассмотрены в [9–15]. Некоторые классы уравнений четвертого и более высоких порядков исследованы в [16–20].

Одной из первых работ по классификации уравнений высших порядков относительно свойства Пенлеве была работа Шази [9], в которой автор исследует на свойство Пенлеве уравнение

$$y''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{(y' - a_k')(y'' - a_k'')}{y - a_k} + \sum_{k=1}^{6} \frac{A_k(y' - a_k')^3 + B_k(y' - a_k')^2 + C_k(y' - a_k')}{y - a_k} + \\ + Dy'' + Ey' + \prod_{k=1}^{6}(y - a_k)\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{y - a_k}, \tag{1.1}$$

в котором полюсы $a_k = a_k(z)$ конечны, различны и в общем случае есть функции независимой переменной z.

В работе [9] также приведена система (S) из 31 алгебраического и дифференциального уравнения

$$\sum_{j=1}^{6} A_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{6} a_j A_j = -6, \quad \sum_{j=1}^{6} a_j^2 A_j = -2\sum_{j=1}^{6} a_j, \tag{1.2}$$

$$2A_k^2 + \sum_{j=1}^{6} \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0, \quad k = \overline{1,6} \quad (j \neq k), \tag{1.3}$$

$$2D+\sum_{j=1}^{6}(B_j-3a'_jA_j)=0, \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{6}F_j=0, \quad \sum_{j=1}^{6}a_jF_j=0, \quad \sum_{j=1}^{6}a_j^2F_j=0, \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}(-\frac{5}{2}A_k-\sum_{j=1}^{6}\frac{1}{a_k-a_j})B_k+\sum_{j=1}^{6}(\frac{A_k}{2}+\frac{1}{a_k-a_j})B_j+\\
+A'_k-A_k\sum_{j=1}^{6}\frac{a'_k-a'_j}{a_k-a_j}+3\sum_{j=1}^{6}\frac{a'_k-a'_j}{a_k-a_j}A_j-\frac{3}{2}A_k\sum_{i=1}^{6}a'_iA_i=0, \quad k=\overline{1,6} \quad (j\neq k),\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}(-2A_k-\sum_{j=1}^{6}\frac{1}{a_k-a_j})C_k+\sum_{j=1}^{6}\frac{C_j}{a_k-a_j}+\sum_{j=1}^{6}\frac{3A_j(a'_k-a'_j)^2+2B_j(a'_k-a'_j)}{a_k-a_j}-\\
-B_k^2+B'_k-B_kD+E-B_k\sum_{j=1}^{6}\frac{a'_k-a'_j}{a_k-a_j}+\sum_{j=1}^{6}\frac{a''_k-a''_j}{a_k-a_j}=0, \quad k=\overline{1,6} \quad (j\neq k),\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}-a'''_k-B_kC_k+C'_k+\sum_{j=1}^{6}\frac{(a'_k-a'_j)(a''_k-a''_j-C_k)}{a_k-a_j}+F_k\prod_{j=1}^{6}(a_k-a_j)+D(a''_k-C_k)+\\
+\sum_{j=1}^{6}\frac{A_j(a'_k-a'_j)^3+B_j(a'_k-a'_j)^2+C_j(a'_k-a'_j)}{a_k-a_j}+Ea'_k=0, \quad k=\overline{1,6} \quad (j\neq k),\end{gathered} \tag{1.8}$$

относительно 26 неизвестных функций $A_k=A_k(z)$, $B_k=B_k(z)$, $C_k=C_k(z)$, $D=D(z)$, $E=E(z)$, $F_k=F_k(z)$, решение которой, по утверждению Шази, определяет необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических точек у решений уравнения (1.1). При этом полюсы a_k являются параметрами системы. Уравнения (1.2) и (1.3), которые определяют функции A_k, мы в дальнейшем будем именовать системой (A).

В [9] Шази не исследовал систему (S), а в работе [21] ее автор утверждает, что формулы

$$A_k=-\frac{1}{a_k}, \quad k=\overline{1,6}, \tag{1.9}$$

дают решение системы (A) и на основании (1.9) приводит утверждение относительно вычисления функций B_k, C_k, D, E, F_k в случае постоянных a_k. Однако, оба эти утверждения ошибочны.

Ошибочность первого из них доказывается подстановкой (1.9) в систему (A). Первое уравнение (1.2) при этом дает условие $\sum_{j=1}^{6}1/a_j=0$, второе уравнение обращается в тождество, а третье дает второе условие $\sum_{j=1}^{6}a_j=0$. Однако подстановка (1.9) в левые части (1.3) с учетом полученных условий приводит соответственно к ненулевым выражениям $1/a_1^2,\ldots,1/a_6^2$.

Приведенное автором [21] решение системы (S) в случае постоянных a_k содержит (1.9) и, следовательно, также ошибочно. Заметим также, что (1.9) не является решением уравнений $2A_k^2-\dfrac{\partial A_k}{\partial a_k}=0$, приведенных в [21]. К сожалению, ошибочный результат работы [21] включен в монографию [22], где он сформулирован в виде теоремы 3.1 (стр. 84) и явился ложной посылкой для последующих ошибочных исследований системы Шази, приведенных в [22] и в работах ее автора (см. список литературы в [22]).

В настоящей работе мы приводим решения системы (A), выраженные в развернутой форме через параметры a_k, и соответствующие им решения системы Шази (S) в случае постоянных a_k.

2. Решение системы (A)

Прежде всего заметим, что последовательное исключение переменных A_k позволяет однозначно выразить A_6, A_5, A_4, A_3, A_2 через A_1. В самом деле из системы (A) последовательно находим

$$A_6 = -A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5,$$

$$A_5 = -(6 + (a_1 - a_6)A_1 + (a_2 - a_6)A_2 + (a_3 - a_6)A_3 + (a_4 - a_6)A_4)/(a_5 - a_6),$$

$$A_4 = -(2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 2a_5 - 2a_6) + \sum_{j=1}^{3}(a_j - a_5)(a_j - a_6)A_j)/((a_4 - a_5)(a_4 - a_6)),$$

$$A_3 = (2a_1^5A_1^2 + 2a_1^4A_1(4 - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)A_1) - a_1^2(6a_2 + 6a_3 + 4(a_4 + a_5 + a_6) - (5a_3(a_4 + a_5 + a_6) + 4(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6)) + a_2(6a_3 + 5(a_4 + a_5 + a_6)))A_1 + 2(a_4a_5a_6 + a_3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6)) + a_2(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6) + a_3(a_4 + a_5 + a_6)))A_1^2) + a_1^3(8 + A_1(-7a_2 - 7a_3 - 6(a_4 + a_5 + a_6) + 2(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6) + a_3(a_4 + a_5 + a_6) + a_2(a_3 + a_4 + a_5 + a_6))A_1)) + a_3a_4a_5a_6(A_1 - A_2) + a_2^3a_3A_2 - a_2^2a_3(-2 + (a_4 + a_5 + a_6)A_2) + a_1(-2a_3^2 + a_3(4a_6 + a_5(4 - 3a_6A_1) + a_4(4 - 3(a_5 + a_6)A_1 + 2a_5a_6A_1^2)) - a_2^3A_2 + a_4a_5a_6(-2A_1 + A_2) + a_2^2(-2 + (a_4 + a_5 + a_6)A_2) + a_2(4(a_5 + a_6) + 2a_3(2 - 2(a_4 + a_5 + a_6)A_1 + (a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6))A_1^2) - a_5a_6(3A_1 + A_2) + a_4(4 + A_1(-3(a_5 + a_6) + 2a_5a_6A_1) - (a_5 + a_6)A_2))) + a_2(2a_3^2 + a_4a_5a_6A_1 + a_3(-4(a_5 + a_6) + a_5a_6(2A_1 + A_2) + a_4(-4 + a_6(2A_1 + A_2) + a_5(2A_1 - 2a_6A_1^2 + A_2)))))/((a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_3 - a_6)),$$

Отдельно отметим структуру A_2

$$A_2 = \frac{s_0A_1^4 + s_1A_1^3 + s_2A_1^2 + s_3A_1 + s_4}{(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)(a_2 - a_6)Q_2},$$

где

$$s_0 = 4(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^2(a_1 - a_5)^2(a_1 - a_6)^2,$$

$$s_1 = 4(a_1 - a_2)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_1 - a_6)(8a_1^4 + a_3a_4a_5a_6 - a_1^3(7a_2 + 7a_3 + 6(a_4 + a_5 + a_6)) + a_2(a_4a_5a_6 + 2a_3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6))) + a_1^2(5a_3(a_4 + a_5 + a_6) + 4(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6)) + a_2(6a_3 + 5(a_4 + a_5 + a_6))) - a_1(2a_4a_5a_6 + 3a_3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6)) + a_2(4a_3(a_4 + a_5 + a_6) + 3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6))))),$$

$$s_2 = 96a_1^7 + 8a_2^3a_3a_4a_5a_6 - 2a_3a_4^2a_5^2a_6^2 - 3a_2a_4a_5a_6(a_4a_5a_6 + a_3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6))) - 24a_1^6(7a_2 + 3(a_3 + 2(a_4 + a_5 + a_6))) + a_1^5(66a_2^2 + 52a_4^2 + 52a_5^2 + 203a_5a_6 + 52a_6^2 + 203a_4(a_5 + a_6) + 103a_3(a_4 + a_5 + a_6) + a_2(123a_3 + 251(a_4 + a_5 + a_6))) + a_1^4(8a_2^3 - 67a_4^2(a_5 + a_6) - 67a_5a_6(a_5 + a_6) - a_4(67a_5^2 + 266a_5a_6 + 67a_6^2) - 5a_3(7a_4^2 + 7a_5^2 + 27a_5a_6 + 7a_6^2 + 27a_4(a_5 + a_6)) - a_2^2(45a_3 + 103(a_4 + a_5 + a_6)) - a_2(91a_4^2 + 91a_5^2 + 346a_5a_6 + 91a_6^2 + 346a_4(a_5 + a_6) + 175a_3(a_4 + a_5 + a_6))) - a_2^2(7a_4a_5a_6(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6)) + a_3(4a_5^2a_6^2 + 19a_4a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4^2(4a_5^2 + 19a_5a_6 + 4a_6^2))) + a_1^3(19a_5^2a_6^2 + 79a_4a_5a_6(a_5 + a_6) - 8a_2^3(a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + a_4^2(19a_5^2 + 79a_5a_6 + 19a_6^2) + a_2^2(41a_4^2 + 41a_5^2 + 143a_5a_6 + 41a_6^2 + 143a_4(a_5 + a_6) + 68a_3(a_4 + a_5 + a_6)) + 2a_3(20a_4^2(a_5 + a_6) + 20a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4(20a_5^2 + 79a_5a_6 + 20a_6^2)) + 3a_2(37a_4^2(a_5 + a_6) + 37a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4(37a_5^2 + 144a_5a_6 + 37a_6^2) + a_3(20a_4^2 + 20a_5^2 + 74a_5a_6 + 20a_6^2 + 74a_4(a_5 + a_6)))) + a_1(-8a_2^3(a_4a_5a_6 + a_3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6))) + a_4a_5a_6(5a_4a_5a_6 + 7a_3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6))) + a_2^2(11a_5^2a_6^2 + 47a_4a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4^2(11a_5^2 + 47a_5a_6 + 11a_6^2) + 9a_3(3a_4^2(a_5 + a_6) + 3a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4(3a_5 + a_6)(a_5 + 3a_6))) + a_2(23a_4a_5a_6(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6)) + a_3(11a_5^2a_6^2 + 50a_4a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4^2(11a_5^2 + 50a_5a_6 + 11a_6^2)))) + a_1^2(-20a_4a_5a_6(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6)) + 8a_2^3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6) + a_3(a_4 + a_5 + a_6)) - 3a_3(3a_5^2a_6^2 + 13a_4a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4^2(3a_5^2 + 13a_5a_6 + 3a_6^2)) - 3a_2^2(a_3(9a_4^2 + 9a_5^2 + 29a_5a_6 + 9a_6^2 + 29a_4(a_5 + a_6)) + 2(8a_4^2(a_5 + a_6) + 8a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4(8a_5^2 + 29a_5a_6 + 8a_6^2))) - a_2(2(14a_5^2a_6^2 + 59a_4a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4^2(14a_5^2 + 59a_5a_6 + 14a_6^2)) + 3a_3(21a_4^2(a_5 + a_6) + 21a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4(21a_5^2 + 80a_5a_6 + 21a_6^2)))),$$

$$s_3 = 128a_1^6 + a_4a_5a_6(a_4a_5a_6 + a_3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6))) - 4a_2^3(a_4a_5a_6 + 2a_3(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6))) - 16a_1^5(13a_2 + 5(a_3 + 2(a_4 + a_5 + a_6))) + 4a_1^4(14a_2^2 + 12a_4^2 + 12a_5^2 + 43a_5a_6 + 12a_6^2 + 43a_4(a_5 + a_6) + 23a_3(a_4 + a_5 + a_6) + a_2(31a_3 + 67(a_4 + a_5 + a_6))) + a_1^3(28a_2^3 - 41a_4^2(a_5 + a_6) - 41a_5a_6(a_5 + a_6) - a_4(41a_5^2 + 159a_5a_6 + 41a_6^2) - a_3(25a_4^2 + 25a_5^2 + 84a_5a_6 + 25a_6^2 + 84a_4(a_5 + a_6)) - a_2^2(23a_3 + 95(a_4 + a_5 + a_6)) - a_2(85a_4^2 + 85a_5^2 + 281a_5a_6 + 85a_6^2 + 281a_4(a_5 + a_6) + 150a_3(a_4 + a_5 + a_6))) + a_2(2a_4a_5a_6(a_5a_6 + a_4(a_5 + a_6)) - a_3(a_5^2a_6^2 - 3a_4a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4^2(a_5^2 - 3a_5a_6 + a_6^2))) + a_2^2(3(a_5^2a_6^2 + 4a_4a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4^2(a_5^2 + 4a_5a_6 + a_6^2)) + a_3(11a_4^2(a_5 + a_6) + 11a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4(11a_5^2 + 29a_5a_6 + 11a_6^2))) + a_1^2(6a_5^2a_6^2 + 31a_4a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4^2(6a_5^2 + 31a_5a_6 + 6a_6^2) - 4a_2^3(6a_3 + 5(a_4 + a_5 + a_6)) + a_2^2(40a_4^2 + 40a_5^2 + 109a_5a_6 + 40a_6^2 + 109a_4(a_5 + a_6) + 47a_3(a_4 + a_5 + a_6)) + a_3(15a_4^2(a_5 + a_6) + 15a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4(15a_5^2 + 59a_5a_6 + 15a_6^2)) + a_2(65a_4^2(a_5 + a_6) + 65a_5a_6(a_5 + a_6) + a_4(65a_5^2 + 232a_5a_6 + 65a_6^2) + a_3(45a_4^2 + 45a_5^2 + 133a_5a_6 +$$

$45a_6^2+133a_4(a_5+a_6))))+a_1(4a_2^3(4a_3(a_4+a_5+a_6)+3(a_5a_6+a_4(a_5+a_6)))-a_4a_5a_6(7a_3(a_4+a_5+a_6)+5(a_5a_6+a_4(a_5+a_6)))-a_2^2(29a_4^2(a_5+a_6)+29a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(29a_5^2+89a_5a_6+29a_6^2)+a_3(22a_4^2+22a_5^2+49a_5a_6+22a_6^2+49a_4(a_5+a_6)))-a_2(7(a_5^2a_6^2+5a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(a_5^2+5a_5a_6+a_6^2))+a_3(23a_4^2(a_5+a_6)+23a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(23a_5^2+76a_5a_6+23a_6^2)))),$

$s_4=2(a_1-a_2)(32a_1^4+a_4a_5a_6(a_3+a_4+a_5+a_6)-16a_1^3(a_2+a_3+2(a_4+a_5+a_6))-a_2^2(a_5a_6+a_4(a_5+a_6)+3a_3(a_4+a_5+a_6))+a_2(2(a_4+a_5)(a_4+a_6)(a_5+a_6)+a_3(3a_4^2+3a_5^2+5a_5a_6+3a_6^2+5a_4(a_5+a_6)))+2a_1^2(-6a_2^2+4a_4^2+4a_5^2+11a_5a_6+4a_6^2+11a_4(a_5+a_6)+7a_3(a_4+a_5+a_6)+a_2(3a_3+11(a_4+a_5+a_6)))+a_1(-3a_4^2(a_5+a_6)-3a_5a_6(a_5+a_6)-3a_3(a_4+a_5+a_6)^2-a_4(3a_5^2+11a_5a_6+3a_6^2)+a_2^2(9a_3+5(a_4+a_5+a_6))-a_2(7a_4^2+7a_5^2+15a_5a_6+7a_6^2+15a_4(a_5+a_6)+10a_3(a_4+a_5+a_6)))).$

Полином Q_2 имеет следующий вид

$Q_2=16a_1^3-a_4a_5a_6-a_3(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))-4a_1^2(3a_2+3a_3+2(a_4+a_5+a_6))-a_2(a_5a_6+a_4(a_5+a_6)+3a_3(a_4+a_5+a_6))+a_1(5a_3(a_4+a_5+a_6)+3(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_2(9a_3+5(a_4+a_5+a_6)))+2(8a_1^4+a_3a_4a_5a_6-a_1^3(7a_2+7a_3+6(a_4+a_5+a_6))+a_2(a_4a_5a_6+2a_3(a_5a_6+a_4(a_5+a_6)))+a_1^2(5a_3(a_4+a_5+a_6)+4(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_2(6a_3+5(a_4+a_5+a_6)))-a_1(2a_4a_5a_6+3a_3(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_2(4a_3(a_4+a_5+a_6)+3(a_5a_6+a_4(a_5+a_6)))))A_1+4(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)(a_1-a_6)A_1^2.$

После подстановки найденных выражений в систему (A) первые четыре уравнения этой системы обращаются в тождества, а последние пять уравнений приобретают следующий вид

$$\begin{gathered}
\frac{(a_2-a_1)^2\,u_{45}\,u_{46}\,u_{56}\,U}{(a_2-a_4)^2\,(a_2-a_5)^2\,(a_2-a_6)^2\,Q_2^2}=0,\\
\frac{(a_3-a_1)^2\,u_{45}\,u_{46}\,u_{56}\,U}{(a_3-a_4)^2\,(a_3-a_5)^2\,(a_3-a_6)^2\,Q_2^2}=0,\\
\frac{(a_4-a_1)^2\,u_{56}\,U_4\,U}{(a_4-a_2)^2\,(a_4-a_3)^2\,(a_4-a_5)^2\,(a_4-a_6)^2\,Q_2^2}=0,\\
\frac{(a_5-a_1)^2\,u_{46}\,U_5\,U}{(a_5-a_2)^2\,(a_5-a_3)^2\,(a_5-a_4)^2\,(a_5-a_6)^2\,Q_2^2}=0,\\
\frac{(a_6-a_1)^2\,u_{45}\,U_6\,U}{(a_6-a_2)^2\,(a_6-a_3)^2\,(a_6-a_4)^2\,(a_6-a_5)^2\,Q_2^2}=0,
\end{gathered}\tag{2.1}$$

где $u_{ij}=2a_1-a_i-a_j+(a_1-a_i)(a_1-a_j)A_1$, а U и U_4, U_5, U_6 — полиномы соответственно пятой и второй степени относительно A_1.

Лемма 2.1. *Система (A) допускает симметрию*

$$(A_k,a_k)\to(A_j,a_j),\quad j,k=\overline{1,6}.$$

Справедливость леммы проверяется непосредственно.

Таким образом, перестановка произвольных компонент (A_k,a_k) решения системы (A) с произвольными компонентами (A_j,a_j) снова приводит к решению системы (A).

Рассмотрим случай $u_{ij}=0$. В силу упомянутой симметрии достаточно рассмотреть лишь один случай, например, $u_{56}=0$. Тогда справедлива

Теорема 2.1. *Система (A) имеет решение*

$$\begin{aligned}
A_j&=\frac{1}{a_5-a_j}+\frac{1}{a_6-a_j},\quad j=\overline{1,4},\\
A_5&=\frac{1}{a_1-a_5}+\frac{1}{a_2-a_5}+\frac{1}{a_3-a_5}+\frac{1}{a_4-a_5}+\frac{2}{a_5-a_6},\\
A_6&=\frac{1}{a_1-a_6}+\frac{1}{a_2-a_6}+\frac{1}{a_3-a_6}+\frac{1}{a_4-a_6}+\frac{2}{a_6-a_5}
\end{aligned}\tag{2.2}$$

при условии на полюсы

$$6a_1a_2a_3a_4-3(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)a_5+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_1a_4+a_2a_4+$$
$$+a_3a_4)a_5^2+(-3(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)+4(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_1a_4+a_2a_4+$$
$$+a_3a_4)a_5-3(a_1+a_2+a_3+a_4)a_5^2)a_6+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_1a_4+a_2a_4+a_3a_4-3(a_1+$$
$$+a_2+a_3+a_4)a_5+6a_5^2)a_6^2=0. \qquad (2.3)$$

Формула для A_1 следует из условия $u_{56}=0$. Формулы для остальных A_k получаются из приведенных выше выражений A_k, $k=\overline{2,6}$ через A_1. Уравнения системы (A) обращаются в тождество в силу условия $u_{56}=0$ и соотношения (2.3). Полюсы a_k при этом являются свободными параметрами, подчиненными условию (2.3) при условии, что $a_k\neq a_j$, если $k\neq j$.

Например, в случае $a_1=-5$, $a_2=-2$, $a_3=-1$, $a_5=-5/2$, $a_6=5$ из (2.3) находим $a_4=1$, а из (2.2) решение системы (A)

$$A_1=1/2,\ A_2=-13/7,\ A_3=-1/2,\ A_4=-1/28,\ A_5=16/7,\ A_6=-11/28.$$

Рассмотрим случай $U=0$. Это уравнение относительно A_1 имеет вид

$$p_0A_1^5+p_1A_1^4+p_2A_1^3+p_3A_1^2+p_4A_1+p_5=0, \qquad (2.4)$$

где

$p_0=16(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_1-a_4)^2(a_1-a_5)^2(a_1-a_6)^2,$

$p_1=32(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)(a_1-a_6)(5a_1^4+a_3a_4a_5a_6-4a_1^3(a_2+a_3+a_4+a_5+$
$a_6)+3a_1^2(a_4a_5+a_4a_6+a_5a_6+a_3(a_4+a_5+a_6)+a_2(a_3+a_4+a_5+a_6))+a_2(a_4a_5a_6+a_3(a_5a_6+$
$a_4(a_5+a_6)))-2a_1(a_4a_5a_6+a_3(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_2(a_5a_6+a_4(a_5+a_6)+a_3(a_4+a_5+a_6)))),$

$p_2=8(80a_1^8+2a_3^2a_4^2a_5^2a_6^2-128a_1^7(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_1^6(50a_2^2+50a_3^2+50a_4^2+199a_4a_5+50a_5^2+$
$199a_4a_6+199a_5a_6+50a_6^2+199a_3(a_4+a_5+a_6)+199a_2(a_3+a_4+a_5+a_6))+7a_2a_3a_4a_5a_6(a_4a_5a_6+$
$a_3(a_5a_6+a_4(a_5+a_6)))-a_1^5(75a_4^2a_5+75a_4a_5^2+75a_4^2a_6+298a_4a_5a_6+75a_5^2a_6+75a_4a_6^2+75a_5a_6^2+$
$75a_3^2(a_4+a_5+a_6)+75a_2^2(a_3+a_4+a_5+a_6)+a_3(75a_4^2+75a_5^2+298a_5a_6+75a_6^2+298a_4(a_5+a_6))+$
$a_2(75a_3^2+75a_4^2+75a_5^2+298a_5a_6+75a_6^2+298a_4(a_5+a_6)+298a_3(a_4+a_5+a_6)))+a_2^2(2a_4^2a_5^2a_6^2+$
$7a_3a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(2a_5^2a_6^2+7a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(2a_5^2+7a_5a_6+2a_6^2)))+a_1^4(27a_4^2a_5^2+$
$107a_4^2a_5a_6+107a_4a_5^2a_6+27a_4^2a_6^2+107a_4a_5a_6^2+27a_5^2a_6^2+a_3^2(27a_4^2+27a_5^2+107a_5a_6+27a_6^2+107a_4(a_5+$
$a_6))+a_2^2(27a_3^2+27a_4^2+27a_5^2+107a_5a_6+27a_6^2+107a_4(a_5+a_6)+107a_3(a_4+a_5+a_6))+a_3(107a_4^2(a_5+a_6)+$
$107a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(107a_5^2+424a_5a_6+107a_6^2))+a_2(107a_4^2(a_5+a_6)+107a_5a_6(a_5+a_6)+107a_3^2(a_4+$
$a_5+a_6)+a_4(107a_5^2+424a_5a_6+107a_6^2)+a_3(107a_4^2+107a_5^2+424a_5a_6+107a_6^2+424a_4(a_5+a_6))))-$
$a_1(11a_3a_4a_5a_6(a_4a_5a_6+a_3(a_5a_6+a_4(a_5+a_6)))+a_2^2(11a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(11a_4^2(a_5+a_6)+$
$11a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(11a_5^2+42a_5a_6+11a_6^2))+a_3(11a_5^2a_6^2+42a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(11a_5^2+42a_5a_6+$
$11a_6^2)))+a_2(11a_4^2a_5^2a_6^2+42a_3a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(11a_5^2a_6^2+42a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(11a_5^2+$
$42a_5a_6+11a_6^2))))+a_1^2(11a_4^2a_5^2a_6^2+43a_3a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(11a_5^2a_6^2+43a_4a_5a_6(a_5+a_6)+$
$a_4^2(11a_5^2+43a_5a_6+11a_6^2))+a_2^2(11a_5^2a_6^2+43a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(11a_5^2+43a_5a_6+11a_6^2)+a_3^2(11a_4^2+$
$11a_5^2+43a_5a_6+11a_6^2+43a_4(a_5+a_6))+a_3(43a_4^2(a_5+a_6)+43a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(43a_5^2+168a_5a_6+$
$43a_6^2)))+a_2(43a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(43a_4^2(a_5+a_6)+43a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(43a_5^2+168a_5a_6+$
$43a_6^2))+a_3(43a_5^2a_6^2+168a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(43a_5^2+168a_5a_6+43a_6^2))))-2a_1^3(18a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+$
$a_6))+a_3^2(18a_4^2(a_5+a_6)+18a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(18a_5^2+71a_5a_6+18a_6^2))+a_3(18a_5^2a_6^2+71a_4a_5a_6(a_5+$
$a_6)+a_4^2(18a_5^2+71a_5a_6+18a_6^2))+a_2^2(18a_4^2(a_5+a_6)+18a_5a_6(a_5+a_6)+18a_3^2(a_4+a_5+a_6)+a_4(18a_5^2+$
$71a_5a_6+18a_6^2)+a_3(18a_4^2+18a_5^2+71a_5a_6+18a_6^2+71a_4(a_5+a_6)))+a_2(18a_5^2a_6^2+71a_4a_5a_6(a_5+$
$a_6)+a_4^2(18a_5^2+71a_5a_6+18a_6^2)+a_3^2(18a_4^2+18a_5^2+71a_5a_6+18a_6^2+71a_4(a_5+a_6))+a_3(71a_4^2(a_5+$
$a_6)+71a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(71a_5^2+280a_5a_6+71a_6^2))))),$

$p_3=8(160a_1^7-224a_1^6(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_1^5(76a_2^2+76a_3^2+76a_4^2+298a_4a_5+76a_5^2+298a_4a_6+$
$298a_5a_6+76a_6^2+298a_3(a_4+a_5+a_6)+298a_2(a_3+a_4+a_5+a_6))-3a_3a_4a_5a_6(a_4a_5a_6+a_3(a_5a_6+a_4(a_5+$
$a_6)))-5a_1^4(19a_4^2a_5+19a_4a_5^2+19a_4^2a_6+74a_4a_5a_6+19a_5^2a_6+19a_4a_6^2+19a_5a_6^2+19a_3^2(a_4+a_5+a_6)+$
$19a_2^2(a_3+a_4+a_5+a_6)+a_3(19a_4^2+19a_5^2+74a_5a_6+19a_6^2+74a_4(a_5+a_6))+a_2(19a_3^2+19a_4^2+19a_5^2+$

$$
74a_5a_6+19a_6^2+74a_4(a_5+a_6)+74a_3(a_4+a_5+a_6)))-a_2^2(3a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(3a_4^2(a_5+
a_6)+3a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(3a_5^2+10a_5a_6+3a_6^2))+a_3(3a_5^2a_6^2+10a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(3a_5^2+10a_5a_6+
3a_6^2)))-a_2(3a_4^2a_5^2a_6^2+10a_3a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(3a_5^2a_6^2+10a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(3a_5^2+
10a_5a_6+3a_6^2))))+4a_1^3(7a_4^2a_5^2+27a_4^2a_5a_6+27a_4a_5^2a_6+7a_4^2a_6^2+27a_4a_5a_6^2+7a_5^2a_6^2+a_3^2(7a_4^2+7a_5^2+
27a_5a_6+7a_6^2+27a_4(a_5+a_6))+a_2^2(7a_3^2+7a_4^2+7a_5^2+27a_5a_6+7a_6^2+27a_4(a_5+a_6)+27a_3(a_4+a_5+a_6))+
a_3(27a_4^2(a_5+a_6)+27a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(27a_5^2+104a_5a_6+27a_6^2))+a_2(27a_4^2(a_5+a_6)+27a_5a_6(a_5+a_6)+
27a_3^2(a_4+a_5+a_6)+a_4(27a_5^2+104a_5a_6+27a_6^2)+a_3(27a_4^2+27a_5^2+104a_5a_6+27a_6^2+104a_4(a_5+a_6))))+
a_1(6a_4^2a_5^2a_6^2+22a_3a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(6a_5^2a_6^2+22a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(6a_5^2+22a_5a_6+6a_6^2))+
a_2^2(6a_5^2a_6^2+22a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(6a_5^2+22a_5a_6+6a_6^2)+a_3^2(6a_4^2+6a_5^2+22a_5a_6+6a_6^2+22a_4(a_5+a_6))+
a_3(22a_4^2(a_5+a_6)+22a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(22a_5^2+80a_5a_6+22a_6^2)))+a_2(22a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+
a_3^2(22a_4^2(a_5+a_6)+22a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(22a_5^2+80a_5a_6+22a_6^2))+a_3(22a_5^2a_6^2+80a_4a_5a_6(a_5+a_6)+
a_4^2(22a_5^2+80a_5a_6+22a_6^2))))-2a_1^2(14a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(14a_4^2(a_5+a_6)+14a_5a_6(a_5+a_6)+
a_4(14a_5^2+53a_5a_6+14a_6^2))+a_3(14a_5^2a_6^2+53a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(14a_5^2+53a_5a_6+14a_6^2))+a_2^2(14a_4^2(a_5+
a_6)+14a_5a_6(a_5+a_6)+14a_3^2(a_4+a_5+a_6)+a_4(14a_5^2+53a_5a_6+14a_6^2)+a_3(14a_4^2+14a_5^2+53a_5a_6+
14a_6^2+53a_4(a_5+a_6)))+a_2(14a_5^2a_6^2+53a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(14a_5^2+53a_5a_6+14a_6^2)+a_3^2(14a_4^2+14a_5^2+
53a_5a_6+14a_6^2+53a_4(a_5+a_6))+a_3(53a_4^2(a_5+a_6)+53a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(53a_5^2+200a_5a_6+53a_6^2))))),
$$

$$
p_4=1280a_1^6+9a_3^2a_4^2a_5^2+26a_3^2a_4^2a_5a_6+26a_3^2a_4a_5^2a_6+26a_3a_4^2a_5^2a_6+9a_3^2a_4^2a_6^2+26a_3^2a_4a_5a_6^2+
26a_3a_4^2a_5a_6^2+9a_3^2a_5^2a_6^2+26a_3a_4a_5^2a_6^2+9a_4^2a_5^2a_6^2-1536a_1^5(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+32a_1^4(14a_2^2+14a_3^2+
14a_4^2+53a_4a_5+14a_5^2+53a_4a_6+53a_5a_6+14a_6^2+53a_3(a_4+a_5+a_6)+53a_2(a_3+a_4+a_5+a_6))-
64a_1^3(7a_4^2a_5+7a_4a_5^2+7a_4^2a_6+26a_4a_5a_6+7a_5^2a_6+7a_4a_6^2+7a_5a_6^2+7a_3^2(a_4+a_5+a_6)+7a_2^2(a_3+a_4+
a_5+a_6)+a_3(7a_4^2+7a_5^2+26a_5a_6+7a_6^2+26a_4(a_5+a_6))+a_2(7a_3^2+7a_4^2+7a_5^2+26a_5a_6+7a_6^2+26a_4(a_5+
a_6)+26a_3(a_4+a_5+a_6)))+a_2^2(9a_5^2a_6^2+26a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(9a_5^2+26a_5a_6+9a_6^2)+a_3^2(9a_4^2+9a_5^2+
26a_5a_6+9a_6^2+26a_4(a_5+a_6))+a_3(26a_4^2(a_5+a_6)+26a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(26a_5^2+82a_5a_6+26a_6^2)))+
a_2(26a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+a_6))+a_3^2(26a_4^2(a_5+a_6)+26a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(26a_5^2+82a_5a_6+26a_6^2))+
a_3(26a_5^2a_6^2+82a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(26a_5^2+82a_5a_6+26a_6^2)))+3a_1^2(7a_3^2(5a_4^2+5a_5^2+18a_5a_6+5a_6^2+
18a_4(a_5+a_6))+7a_2^2(5a_3^2+5a_4^2+5a_5^2+18a_5a_6+5a_6^2+18a_4(a_5+a_6)+18a_3(a_4+a_5+a_6))+7(5a_5^2a_6^2+
18a_4a_5a_6(a_5+a_6)+a_4^2(5a_5^2+18a_5a_6+5a_6^2))+2a_3(63a_4^2(a_5+a_6)+63a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(63a_5^2+227a_5a_6+
63a_6^2))+2a_2(63a_4^2(a_5+a_6)+63a_5a_6(a_5+a_6)+63a_3^2(a_4+a_5+a_6)+a_4(63a_5^2+227a_5a_6+63a_6^2)+a_3(63a_4^2+
63a_5^2+227a_5a_6+63a_6^2+227a_4(a_5+a_6))))-2a_1(7a_2^2(5a_4^2(a_5+a_6)+5a_5a_6(a_5+a_6)+5a_3^2(a_4+a_5+a_6)+
a_4(5a_5^2+17a_5a_6+5a_6^2)+a_3(5a_4^2+5a_5^2+17a_5a_6+5a_6^2+17a_4(a_5+a_6)))+7(5a_4a_5a_6(a_5a_6+a_4(a_5+
a_6))+a_3^2(5a_4^2(a_5+a_6)+5a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(5a_5^2+17a_5a_6+5a_6^2))+a_3(5a_5^2a_6^2+17a_4a_5a_6(a_5+a_6)+
a_4^2(5a_5^2+17a_5a_6+5a_6^2)))+a_2(7a_3^2(5a_4^2+5a_5^2+17a_5a_6+5a_6^2+17a_4(a_5+a_6))+7(5a_5^2a_6^2+17a_4a_5a_6(a_5+
a_6)+a_4^2(5a_5^2+17a_5a_6+5a_6^2))+a_3(119a_4^2(a_5+a_6)+119a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(119a_5^2+410a_5a_6+119a_6^2)))),
$$

$$
p_5=2(256a_1^5-3a_3^2a_4^2a_5-3a_3^2a_4a_5^2-3a_3a_4^2a_5^2-3a_3^2a_4^2a_6-7a_3^2a_4a_5a_6-7a_3a_4^2a_5a_6-3a_3^2a_5^2a_6-
7a_3a_4a_5^2a_6-3a_4^2a_5^2a_6-3a_3^2a_4a_6^2-3a_3a_4^2a_6^2-3a_3^2a_5a_6^2-7a_3a_4a_5a_6^2-3a_4^2a_5a_6^2-3a_3a_5^2a_6^2-3a_4a_5^2a_6^2-
256a_1^4(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+32a_1^3(2a_2^2+2a_3^2+2a_4^2+7a_4a_5+2a_5^2+7a_4a_6+7a_5a_6+2a_6^2+7a_3(a_4+a_5+
a_6)+7a_2(a_3+a_4+a_5+a_6))-a_2^2(3a_4^2(a_5+a_6)+3a_5a_6(a_5+a_6)+3a_3^2(a_4+a_5+a_6)+a_4(3a_5^2+7a_5a_6+
3a_6^2)+a_3(3a_4^2+3a_5^2+7a_5a_6+3a_6^2+7a_4(a_5+a_6)))-16a_1^2(3a_4^2a_5+3a_4a_5^2+3a_4^2a_6+10a_4a_5a_6+3a_5^2a_6+
3a_4a_6^2+3a_5a_6^2+3a_3^2(a_4+a_5+a_6)+3a_2^2(a_3+a_4+a_5+a_6)+a_3(3a_4^2+3a_5^2+10a_5a_6+3a_6^2+10a_4(a_5+a_6))+
a_2(3a_3^2+3a_4^2+3a_5^2+10a_5a_6+3a_6^2+10a_4(a_5+a_6)+10a_3(a_4+a_5+a_6)))-a_2(3a_5^2a_6^2+7a_4a_5a_6(a_5+a_6)+
a_4^2(3a_5^2+7a_5a_6+3a_6^2)+a_3^2(3a_4^2+3a_5^2+7a_5a_6+3a_6^2+7a_4(a_5+a_6))+a_3(7a_4^2(a_5+a_6)+7a_5a_6(a_5+a_6)+
a_4(7a_5^2+26a_5a_6+7a_6^2)))+a_1(9a_4^2a_5^2+26a_4^2a_5a_6+26a_4a_5^2a_6+9a_4^2a_6^2+26a_4a_5a_6^2+9a_5^2a_6^2+a_3^2(9a_4^2+9a_5^2+
26a_5a_6+9a_6^2+26a_4(a_5+a_6))+a_2^2(9a_3^2+9a_4^2+9a_5^2+26a_5a_6+9a_6^2+26a_4(a_5+a_6)+26a_3(a_4+a_5+a_6))+
a_3(26a_4^2(a_5+a_6)+26a_5a_6(a_5+a_6)+a_4(26a_5^2+82a_5a_6+26a_6^2))+a_2(26a_4^2(a_5+a_6)+26a_5a_6(a_5+a_6)+
26a_3^2(a_4+a_5+a_6)+a_4(26a_5^2+82a_5a_6+26a_6^2)+a_3(26a_4^2+26a_5^2+82a_5a_6+26a_6^2+82a_4(a_5+a_6))))).
$$

В силу (2.1) справедлива

Теорема 2.2. *Пусть при некоторых фиксированных значениях полюсов a_k A_1 — есть решение уравнения (2.4) такое, что $Q_2 \neq 0$. Тогда A_1 и A_k ($k=\overline{2,6}$), вычисленные по этому значению A_1, определяют решение системы (A).*

Замечание 2.1. Приведенные выше результаты относительно решения системы (A) являются развернутым изложением работы [23].

Замечание 2.2. Заметим, что если для параметров a_k выполняется условие (2.3) теоремы 2.1, то уравнение (2.4) факторизуется и может быть записано в виде

$$(A_1Q_1 - P_1)(\tilde{p}_0 A_1^4 + \tilde{p}_1 A_1^3 + \tilde{p}_2 A_1^2 + \tilde{p}_3 A_1 + \tilde{p}_4) = 0,$$

где $\tilde{p}_k$ — полиномы по A_k.

Обращение в нуль множителя $A_1Q_1 - P_1$ позволяет определить A_1 и последовательно остальные A_k в явной форме, которая совпадает с формулами теоремы 2.1. Это означает, что теорема 2.1 является частным случаем теоремы 2.2. Однако, при выполнении условия (2.3) A_k определяются в замкнутой форме (2.2).

Замечание 2.3. В теореме 2.2 требуется, чтобы функция A_1, которая является корнем полинома U, не являлась корнем полинома Q_2. Результант этих полиномов обращается в нуль если $R_1R_2R_3 = 0$, где

$$\begin{aligned} R_1 = {} & a_1a_2a_3 + a_1a_4a_3 - 3a_2a_4a_3 - a_1a_5a_3 + a_2a_5a_3 + a_4a_5a_3 - a_1a_6a_3 + a_2a_6a_3 + a_4a_6a_3 - a_5a_6a_3 + \\ & + a_1a_2a_4 - a_1a_2a_5 - a_1a_4a_5 + a_2a_4a_5 - a_1a_2a_6 - a_1a_4a_6 + a_2a_4a_6 + 3a_1a_5a_6 - a_2a_5a_6 - a_4a_5a_6, \end{aligned}$$

а R_2 и R_3 получаются из R_1 заменой $a_4 \leftrightarrow a_5$ и $a_4 \leftrightarrow a_6$ соответственно.

Замечание 2.4. После опубликования работы [23] и тезисов докладов [24, 25] были приняты к печати и опубликованы тезисы доклада И. П. Мартынова и А. В. Чичурина [26], в которых приведена следующая

Теорема. *Решение системы (A) имеет вид*

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5} \quad (k = \overline{1,6}), \tag{2.5}$$

где основные симметрические многочлены σ_k, составленные из элементов a_k ($k = \overline{1,6}$), связаны с величинами α_2, β_2, β_3 следующими соотношениями:

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2}, \tag{2.6}$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\sigma_2\alpha_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4)}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}, \tag{2.7}$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению 5-й степени

$$\begin{aligned} & 1296\alpha_2^5 - 1296\alpha_2^4 + 216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4)\alpha_2^3 + 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - \\ & -9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 + (12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) + \sigma_1^2(9\sigma_3^2 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - \\ & -12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) - 4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 + (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_4 + \\ & +12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6 = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

При этом авторы утверждают [26, стр. 91], что ими: «...доказано, что для каждого из пяти корней уравнения (2.8) соотношения (2.5)–(2.7) определяют решение системы (A)».

Однако, приведенная теорема в общем случае ошибочна. Контрпримером может служить следующий набор параметров

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 4,\ a_5 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{215}),\ a_6 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{215}). \tag{2.9}$$

При этом наборе параметров уравнение (2.8) имеет корень $\alpha_2 = 0$. Однако (2.9) и корень $\alpha_2 = 0$ обращают в нуль числители и знаменатели (2.6) и (2.7). Следовательно, для выбранного набора (2.9) и корня $\alpha_2 = 0$ величины β_2 и β_3, а значит и A_k, не могут быть определены.

3. Случай постоянных полюсов

Заметим, что решение системы (S) при известных A_k сводится к последовательному решению трех линейных алгебраических систем с дополнительными ограничениями, что отмечено в [22]. Так система (1.6) при известных A_k представляет собой линейную систему относительно B_k. Если же известны A_k и B_k, то возможно определить функцию D из уравнения (1.4), а системы (1.5), (1.7) и (1.8) являются линейными относительно функций C_k и F_k.

Рассмотрим случай постоянных полюсов a_k. Тогда система Шази существенно упрощается и принимает вид

$$\sum_{j=1}^{6} A_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{6} a_j A_j = -6, \quad \sum_{j=1}^{6} a_j^2 A_j = -2\sum_{j=1}^{6} a_j, \tag{3.1}$$

$$2A_k^2 + \sum_{j=1}^{6} \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0, \quad k = \overline{1,6} \quad (j \neq k), \tag{3.2}$$

$$2D + \sum_{j=1}^{6} B_j = 0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{6} F_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{6} a_j F_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{6} a_j^2 F_j = 0, \tag{3.4}$$

$$(-\frac{5}{2}A_k - \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{a_k - a_j})B_k + \sum_{j=1}^{6}(\frac{A_k}{2} + \frac{1}{a_k - a_j})B_j = 0, \quad k = \overline{1,6} \quad (j \neq k), \tag{3.5}$$

$$(-2A_k - \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{a_k - a_j})C_k + \sum_{j=1}^{6} \frac{C_j}{a_k - a_j} - B_k^2 + B_k' - B_k D + E = 0, \quad k = \overline{1,6} \quad (j \neq k), \tag{3.6}$$

$$-B_k C_k - DC_k + C_k' + F_k \prod_{j=1}^{6}(a_k - a_j) = 0, \quad k = \overline{1,6} \quad (j \neq k). \tag{3.7}$$

Решение первых 9 уравнений этой системы в замкнутой форме, т. е. определение A_k, дано теоремой 2.1. Используя этот результат в данной работе мы приводим решение системы (S) в случае постоянных полюсов a_k в явной форме.

Система уравнений (3.5) является линейной однородной системой относительно неизвестных функций B_k. При этом матрица системы имеет нулевой определитель, следовательно ранг системы не превосходит 5. Нетрудно видеть, что система (3.5) имеет решение

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6, \tag{3.8}$$

где $B_6 = B_6(z)$ — произвольная аналитическая функция.

Однако заметим, что при подходящем выборе a_k ранг системы может быть понижен. Например, в случае $a_1 = 1$, $a_2 = -19$, $a_3 = 3$, $a_4 = 49/9$, $a_5 = 5$, $a_6 = 6$, которые удовлетворяют теореме 2.1, ранг системы (3.5) равен 4.

Используя (3.8) из уравнения (3.3) может быть найдено выражение для функции D

$$D = -3B_6. \tag{3.9}$$

Система (3.6) есть линейная неоднородная система относительно C_k и может быть решена методом Гаусса. Ранг этой системы также не превосходит 5, и она имеет решение

$$C_1 = \frac{(a_1 - a_6)^2(E + B_6' + 2B_6^2)}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - 3a_6} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2(a_1(a_2+a_3+a_4)+a_5a_6)-(a_5+a_6)(3a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-a_6)}{(a_5-a_6)(a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6)}C_6,\\
C_2 &= \frac{(a_2-a_6)^2(E+B_6'+2B_6^2)}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6}+\\
&+\frac{2(a_2(a_1+a_3+a_4)+a_5a_6)-(a_5+a_6)(a_1+3a_2+a_3+a_4-a_5-a_6)}{(a_5-a_6)(a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6)}C_6,\\
C_3 &= \frac{(a_3-a_6)^2(E+B_6'+2B_6^2)}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6}+\\
&+\frac{2(a_3(a_1+a_2+a_4)+a_5a_6)-(a_5+a_6)(a_1+a_2+3a_3+a_4-a_5-a_6)}{(a_5-a_6)(a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6)}C_6,\\
C_4 &= \frac{(a_4-a_6)^2(E+B_6'+2B_6^2)}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6}+\\
&+\frac{2(a_4(a_1+a_2+a_3)+a_5a_6)-(a_5+a_6)(a_1+a_2+a_3+3a_4-a_5-a_6)}{(a_5-a_6)(a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6)}C_6,\\
C_5 &= -\frac{(a_5-a_6)^2(E+B_6'+2B_6^2)}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6}-\frac{a_1+a_2+a_3+a_4-3a_5-a_6}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6}C_6
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

при условии, что $a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6 \neq 0$.

Найденные выражения для C_k зависят не только от функции B_6, но еще и от функций C_6 и E, которые пока также будем считать произвольными. Ниже будут получены их выражения через B_6.

Рассмотрим случай

$$
a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6=0. \tag{3.11}
$$

Тогда решение системы (3.6) принимает вид

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{(a_2+a_3+a_4-3a_6)^2(E+B_6'+2B_6^2)}{2(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)}-\frac{(a_1-a_6)^2C_5}{(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)^2},\\
C_2 &= -\frac{(a_1+a_3+a_4-3a_6)^2(E+B_6'+2B_6^2)}{2(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)}-\frac{(a_2-a_6)^2C_5}{(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)^2},\\
C_3 &= -\frac{(a_1+a_2+a_4-3a_6)^2(E+B_6'+2B_6^2)}{2(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)}-\frac{(a_3-a_6)^2C_5}{(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)^2},\\
C_4 &= -\frac{(a_1+a_2+a_3-3a_6)^2(E+B_6'+2B_6^2)}{2(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)}-\frac{(a_4-a_6)^2C_5}{(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)^2},\\
C_6 &= \frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)(E+B_6'+2B_6^2).
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

В (3.12) $a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6 \neq 0$, так как в противном случае в силу (3.11) имеем противоречие $a_5=a_6$.

Значения функций F_k найдем в два этапа. Сначала, используя найденные выражения (3.8) и (3.9), выразим F_k из (3.7)

$$
F_k = -\frac{C_k'+2B_6C_k}{\prod_{j=1}^{6}(a_k-a_j)}, \quad k=\overline{1,6} \quad (j\neq k). \tag{3.13}
$$

После этого, учитывая (3.10), подставим (3.13) последовательно в каждое уравнение (3.4). Первое уравнение даст нам выражение для E', которое мы в силу его громоздкости здесь не приводим. Однако, подстановка этого выражения соответственно во второе и третье уравнения (3.4) существенно их упрощает

$$
\frac{(C_6'+2B_6C_6)}{(a_1-a_6)(a_2-a_6)(a_3-a_6)(a_4-a_6)}=0,\ \ \frac{(a_5+a_6)(C_6'+2B_6C_6)}{(a_1-a_6)(a_2-a_6)(a_3-a_6)(a_4-a_6)}=0,
$$

откуда

$$C_6' + 2B_6C_6 = 0. \tag{3.14}$$

В случае (3.11) та же операция приводит два последних уравнения (3.13) к следующему виду

$$\frac{C_5' + 2B_6C_5}{(a_1+a_2+a_3-3a_6)(a_1+a_2+a_4-3a_6)(a_1+a_3+a_4-3a_6)(a_2+a_3+a_4-3a_6)} = 0,$$
$$\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4-2a_6)(C_5' + 2B_6C_5)}{(a_1+a_2+a_3-3a_6)(a_1+a_2+a_4-3a_6)(a_1+a_3+a_4-3a_6)(a_2+a_3+a_4-3a_6)} = 0,$$

откуда

$$C_5' + 2B_6C_5 = 0. \tag{3.15}$$

В полученных выражениях знаменатели не могут обращаться в 0, так как, например, если $a_1 + a_2 + a_3 - 3a_6 = 0$, то вместе с (3.11) это приводит к противоречию $a_4 = a_5$ и т. д.

Найденные выражения позволяют окончательно найти F_k из (3.7)

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = 0. \tag{3.16}$$

Выражение для E', полученное из первого уравнения (3.4), после подстановки найденных выражений принимает следующий вид

$$E' + 2B_6E = -B_6'' - 6B_6B_6' - 4B_6^3,$$

откуда

$$E = \tilde{\mathcal{E}} e^{-2\int B_6(z)\,dz} - B_6' - 2B_6^2, \tag{3.17}$$

где $\tilde{\mathcal{E}}$ — произвольная постоянная.

Заметим, что полученные выражения для F_k и E не зависят от условия (3.11).

Далее из (3.14) и (3.15) находим

$$C_6 = \tilde{\mathcal{C}}_6 e^{-2\int B_6(z)\,dz}, \tag{3.18}$$

$$C_5 = \tilde{\mathcal{C}}_5 e^{-2\int B_6(z)\,dz}, \tag{3.19}$$

где $\tilde{\mathcal{C}}_6$ и $\tilde{\mathcal{C}}_5$ — произвольные постоянные.

Теперь из (3.10) окончательно получаем

$$C_1 = e^{-2\int B_6(z)\,dz}\left(\tilde{\mathcal{E}}\frac{(a_1-a_6)^2}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6} + \right.$$
$$\left. + \tilde{\mathcal{C}}_6\frac{2(a_1(a_2+a_3+a_4)+a_5a_6) - (a_5+a_6)(3a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-a_6)}{(a_5-a_6)(a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6)}\right),$$
$$C_2 = e^{-2\int B_6(z)\,dz}\left(\tilde{\mathcal{E}}\frac{(a_2-a_6)^2}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6} + \right.$$
$$\left. + \tilde{\mathcal{C}}_6\frac{2(a_2(a_1+a_3+a_4)+a_5a_6) - (a_5+a_6)(a_1+3a_2+a_3+a_4-a_5-a_6)}{(a_5-a_6)(a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6)}\right),$$
$$C_3 = e^{-2\int B_6(z)\,dz}\left(\tilde{\mathcal{E}}\frac{(a_3-a_6)^2}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6} + \right.$$
$$\left. + \tilde{\mathcal{C}}_6\frac{2(a_3(a_1+a_2+a_4)+a_5a_6) - (a_5+a_6)(a_1+a_2+3a_3+a_4-a_5-a_6)}{(a_5-a_6)(a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6)}\right),$$
$$C_4 = e^{-2\int B_6(z)\,dz}\left(\tilde{\mathcal{E}}\frac{(a_4-a_6)^2}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6} + \right.$$
$$\left. + \tilde{\mathcal{C}}_6\frac{2(a_4(a_1+a_2+a_3)+a_5a_6) - (a_5+a_6)(a_1+a_2+a_3+3a_4-a_5-a_6)}{(a_5-a_6)(a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6)}\right),$$
$$C_5 = -e^{-2\int B_6(z)\,dz}\left(\tilde{\mathcal{E}}\frac{(a_5-a_6)^2}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6} + \tilde{\mathcal{C}}_6\frac{a_1+a_2+a_3+a_4-3a_5-a_6}{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-3a_6}\right),$$

а в случае (3.11) из (3.12) получаем

$$\begin{aligned}
C_1 &= -e^{-2\int B_6(z)\,dz}\left(\tilde{\mathcal{E}}\frac{(a_2+a_3+a_4-3a_6)^2}{2(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)}+\tilde{\mathcal{C}}_5\frac{(a_1-a_6)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)^2}\right),\\
C_2 &= -e^{-2\int B_6(z)\,dz}\left(\tilde{\mathcal{E}}\frac{(a_1+a_3+a_4-3a_6)^2}{2(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)}+\tilde{\mathcal{C}}_5\frac{(a_2-a_6)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)^2}\right),\\
C_3 &= -e^{-2\int B_6(z)\,dz}\left(\tilde{\mathcal{E}}\frac{(a_1+a_2+a_4-3a_6)^2}{2(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)}+\tilde{\mathcal{C}}_5\frac{(a_3-a_6)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)^2}\right),\\
C_4 &= -e^{-2\int B_6(z)\,dz}\left(\tilde{\mathcal{E}}\frac{(a_1+a_2+a_3-3a_6)^2}{2(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)}+\tilde{\mathcal{C}}_5\frac{(a_4-a_6)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6)^2}\right),\\
C_6 &= \frac{1}{2}e^{-2\int B_6(z)\,dz}\tilde{\mathcal{E}}(a_1+a_2+a_3+a_4-4a_6).
\end{aligned}$$

Тем не менее приведенные решения системы (S) не исчерпывают все возможные решения в случае постоянных полюсов a_k. Это связано с тем, что выше мы рассмотрели лишь случай теоремы 2.1, однако другие решения для A_k в случае постоянных полюсов могут быть получены из теоремы 2.2. Схема получения решений при этом остается прежней, хотя в явной форме выписать эти решения затруднительно, так как даже A_1 в общем случае определяется алгебраическим уравнением пятой степени (2.4), коэффициенты которого зависят от постоянных параметров a_k.

Тем не менее приведем пример решения системы (S) в случае постоянных полюсов с A_k, удовлетворяющими теореме 2.2, но не удовлетворяющими теореме 2.1:

$$\begin{gathered}
a_1=-2i,\ a_2=-i, a_3=-1,\ a_4=1,\ a_5=i,\ a_6=2i,\\
A_1=-4i/5,\ A_2=-5i/6, A_3=7/10+2i/5,\\
A_4=-7/10+2i/5,\ A_5=-i/2,\ A_6=4i/3,\\
B_1=B_2=B_3=B_4=B_5=B_6,\\
C_1=-(12i\tilde{\mathcal{E}}+64\tilde{\mathcal{C}}_5+27\tilde{\mathcal{C}}_6)e^{-2\int B_6(z)\,dz}/5,\ C_2=-(9\tilde{\mathcal{C}}_5+4\tilde{\mathcal{C}}_6)e^{-2\int B_6(z)\,dz},\\
C_3=((3-4i)\tilde{\mathcal{E}}+(12-41i)\tilde{\mathcal{C}}_5+(6-18i)\tilde{\mathcal{C}}_6)e^{-2\int B_6(z)\,dz}/5,\\
C_4=((-3-4i)\tilde{\mathcal{E}}+(12+41i)\tilde{\mathcal{C}}_5+(6+18i)\tilde{\mathcal{C}}_6)e^{-2\int B_6(z)\,dz}/5,\\
C_5=\tilde{\mathcal{C}}_5e^{-2\int B_6(z)\,dz},\ C_6=\tilde{\mathcal{C}}_6e^{-2\int B_6(z)\,dz},\\
D=-3B_6,\ E=\tilde{\mathcal{E}}e^{-2\int B_6(z)\,dz}-B_6'-2B_6^2,\\
F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=0,
\end{gathered}$$

где $B_6=B_6(z)$ — произвольная аналитическая функция, а $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{C}}_5$, $\tilde{\mathcal{C}}_6$ — произвольные постоянные.

Приведенная выше схема решения системы Шази (S) в случае постоянных полюсов сохраняется и в общем случае. Приведем пример решения системы Шази (S) с непостоянными полюсами a_k:

$$\begin{gathered}
a_1=z+1,\ a_2=z+2, a_3=z+3,\ a_4=z+179/33,\ a_5=z+5,\ a_6=z+6,\\
A_1=9/20,\ A_2=7/12, A_3=5/6, A_4=-165/266,\ A_5=-61/84,\ A_6=-593/1140,\\
B_1=B_2=B_3=B_4=B_5=B_6,\\
C_1=(-51150\tilde{\mathcal{E}}-65625\tilde{\mathcal{C}}_5+68856\tilde{\mathcal{C}}_6)e^{-2\int B_6(z)\,dz}/26309,\\
C_2=(-30888\tilde{\mathcal{E}}-63392\tilde{\mathcal{C}}_5+58995\tilde{\mathcal{C}}_6)e^{-2\int B_6(z)\,dz}/26309,\\
C_3=(-30591\tilde{\mathcal{E}}-119448\tilde{\mathcal{C}}_5+82460\tilde{\mathcal{C}}_6)e^{-2\int B_6(z)\,dz}/52618,\\
C_4=(-123823\tilde{\mathcal{E}}+857736\tilde{\mathcal{C}}_5+873180\tilde{\mathcal{C}}_6)e^{-2\int B_6(z)\,dz}/1736394,\\
C_5=\tilde{\mathcal{C}}_5e^{-2\int B_6(z)\,dz},\ C_6=\tilde{\mathcal{C}}_6e^{-2\int B_6(z)\,dz},\\
D=-3B_6,\ E=\tilde{\mathcal{E}}e^{-2\int B_6(z)\,dz}-B_6'-2B_6^2,
\end{gathered}$$

$$F_1 = 33(\tilde{\mathcal{E}}e^{-2\int B_6(z)\,dz} - B_6' - 2B_6^2))/5840,\ F_2 = -11(\tilde{\mathcal{E}}e^{-2\int B_6(z)\,dz} - B_6' - 2B_6^2))/452,$$
$$F_3 = 11(\tilde{\mathcal{E}}e^{-2\int B_6(z)\,dz} - B_6' - 2B_6^2))/320,\ F_4 = 39135393(\tilde{\mathcal{E}}e^{-2\int B_6(z)\,dz} - B_6' - 2B_6^2))/351077440,$$
$$F_5 = -11(\tilde{\mathcal{E}}e^{-2\int B_6(z)\,dz} - B_6' - 2B_6^2)/112,\ F_6 = -11(\tilde{\mathcal{E}}e^{-2\int B_6(z)\,dz} - B_6' - 2B_6^2)/380,$$

где $B_6 = B_6(z)$ — произвольная аналитическая функция, а $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{C}}_5$, $\tilde{\mathcal{C}}_6$ — произвольные постоянные.

Литература

1. *Painlevé P.* Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // Bull. Soc. Math. France. 1900. Vol. 28. P. 201-261.
2. *Painlevé P.* Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta Math. 1902. Vol. 25. P. 1-85.
3. *Gambier B.* Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes // Acta Math. Vol. 33. 1909. P. 1-55.
4. *Ince E. L.* Ordinary differential equations. Longmans, Green, London, 1927. (Dover, New York, 1956.) [Русский перевод: Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ГНТИУ, Харьков, 1939.]
5. *Итс А. Р., Капаев А. А., Новокшенов В. Ю., Фокас А. С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва, Ижевск, 2005.
6. *Gromak V. I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé differential equations in the complex plane. de Gruyter Stud. Math. Vol. 28, de Gruyter, Berlin, New York, 2002.
7. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions. Aspects Math. E. Vol. 16, Vieweg, Braunschweig, 1991.
8. *Ablowitz M. J., Clarkson P. A.* Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. London Math. Soc. Lect. Notes Math. Vol. 149, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
9. *Chazy J.* Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 317-385.
10. *Bureau F. J.* Differential equations with fixed critical points // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1964. Vol. 64. P. 229-364.
11. *Bureau F. J.* Differential equations with fixed critical points // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1964. Vol. 66. P. 1-116.
12. *Мартынов И. П.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 6. С. 937-946.
13. *Exton H.* Nonlinear ordinary differential equations with fixed critical points // Rend. Mat. 1973. Vol. 6. No. 2. P. 419-462.
14. *Cosgrove C. M.* Higher-order Painlevé equations in the polynomial class I. Bureau symbol $P2$ // Stud. Appl. Math. 2000. Vol. 104. No. 1. P. 1-65.
15. *Mŭgan U., Jrad F.* Painlevé test and higher order differential equations // J. Nonlinear Math. Phys. 2002. Vol. 9. No. 3. P. 282-310.
16. *Cosgrove C. M.* Higher-order Painlevé equations in the polynomial class II. Bureau symbol $P1$. University of Sydney, School of Mathematics and Statistics, Nonlinear Analysis Research Reports, 2000-06 (Preprint).
17. *Kudryashov N. A.* Fourth-order analogies to the Painlevé equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. Vol. 35. No. 21. P. 4617-4632.
18. *Clarkson P. A., Joshi N., Pickering A.* Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach // Inverse Problems. 1999. Vol. 15. P. 175-187.
19. *Noumi M., Yamada Y.* Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$ // Funkcial. Ekvac. 1998. Vol. 41. P. 483-503.
20. *Sobolevsky S.* // Stud. Appl. Math. 2006. Vol. 117. P. 215-237.
21. *Лукашевич Н. А.* К теории уравнения Шази // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. №. 2. С. 353-357.
22. *Чичурин А. В.* Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса. Изд-во Российского университета дружбы народов, Москва, 2002.
23. *Громак В. И.* О решениях системы Шази // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. №. 5. С. 616-620.
24. *Громак В. И.* О решениях системы Шази // Еругинские чтения-2007: Тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 16-19 мая 2007 г. / Институт математики НАН Беларуси, Минск, 2007.

25. *Атрохов К. Г., Громак В. И.* Решение системы Шази в одном случае // Еругинские чтения-2007: Тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 16-19 мая 2007 г. / Институт математики НАН Беларуси, Минск, 2007.
26. *Мартынов И. П., Чичурин А. В.* Использование системы *Mathematica* при решении системы уравнений Шази // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: Тез. докл. междунар. конф., Минск, 2-5 октября 2007 г. / Институт математики НАН Беларуси, Минск, 2007.

K. G. Atrokhau, V. I. Gromak

Solution of the Chazy system in the case of constant poles

Summary

The Chazy system with regard to unknown functions A_k, B_k, C_k, F_k, D, E and parameters a_k determines the necessary and sufficient conditions for the absense of movable critical points of solutions of the particular 3rd-order differential equation which was considered by Chazy in one of the first papers on the classification of higher-order ODEs with respect to the Painlevé property. In present paper we solve system for functions A_k and obtain a solution of full Chazy system in the case of constant parameters a_k.