СЕТЕВАЯ ЭКОНОМИКА И ЭНТРОПИЯ СЕТЕЙ

Данильчук А. Б., Сердюк А. А. (Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого, г. Черкассы, Украина)

Рассматривая современный мир, можно констатировать, что им правят сети: любые системы, в том числе и социально-экономические, можно представить в виде сетевой структуры [1].

Понятие энтропии сетей, как и многие другие, основывается на понятии энтропии Шеннона. Существует достаточно много подходов к определению энтропии сетей. Рассмотрим некоторые из них.

Энтропию сети можно определить следующим образом:

$$H(q) = -\sum_{k=1}^{N} q(k)\log(q(k)),$$

где $q = (q(1), q(2), \ldots, q(\ ))$, а $q(k) = (k+1)P_{k+1}/\langle k\rangle$ – остаточная степень узла, $P_{\text{k+1}}$ является распределением степени узлов, а $\langle k\rangle$ – средним значением степеней [1].

Более сложным подходом является определение энтропии сетей на основе случайных ненаправленных сетей, которые представляются неориентированными графами, что свойственно экономическим моделям [2]. Для таких сетей N – общее количество узлов, а p – вероятность существования связи для любых двух узлов. В общем случае $p \in [0,1]$. В случае, когда p = 1, общее количество узлов в ядре сети составляет $N(N-1)/2$ (каждый агент сети связан с любым другим агентом). Обозначив $\mathrm{M} = N(N-1)/2$, запишем распределение вероятности существования связей, используя биномиальное распределение:

$$P(m) = \frac{M!}{m!(M-m)!} p^m \cdot (1-p)^{M-m}, \quad m = 0,1,2,\ldots,M.$$

Для M возможных связей и m существующих связей общая формула определения количества имеет вид:

$$C_M^m = M!\big/ m!(M-m)!.$$

Эта формула базируется на предположении об отличии узлов графа друг от друга.

Обозначим возможные конфигурации как $\Omega(N, p)$ с общим количеством узлов M и вероятностью P. Тогда:

$$\Omega(N,p) = \sum_{m=0}^{N} C_M^m = \sum_{m=0}^{M} \frac{M!}{m!(M-m)!}, \quad M = N(N-1)/2.$$

Для каждого значения m существует C_M^m возможных конфигураций соответственно, при этом все конфигурации могут появляться с одинаковой вероятностью 1/C_M^m. Используя условную вероятность существования m связей в сети, получаем:

$$P_i = P(m)/C_M^m = p^m(1-p)^{M-m}, \; i = 1,2,\ldots,\Omega(N,p).$$

Учитывая, что вероятности каждой из C_M^m конфигураций для заданного m равны, то значения энтропии для общего количества $\sum_{i=0}^{M} C_M^m$ конфигураций будут рассчитываться следующим образом:

$$\begin{aligned} S(N,p) = &-C_M^0\left(p^0(1-p)^{M-0}\right)\log_2\left(p^0(1-p)^{\text{M-0}}\right) \\ &- C_M^1\left(p^1(1-p)^{M-1}\right)\log_2\left(p^1(1-p)^{M-1}\right) \\ &- \ldots - C_M^{\mathrm{M}}\left(p^{\mathrm{M}}(1-p)^{M-M}\right)\log_2\left(p^M(1-p)^{M-M}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{M} C_M^m\left(p^m(1-p)^{M-m}\right)\log_2\left(p^m(1-p)^{M-m}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, проведя упрощение, получаем энтропию случайной сети на основе ее конфигурации в общем виде:

$$\begin{aligned} S(N,p) &= -\sum_{m=0}^{M} C_M^m\left(p^m(1-p)^{M-m}\right)(m\log_2 p + (M-m)\log_2(1-p)) = \\ &= -\sum_{m=0}^{M} P(m)(m\log_2 p + (M-m)\log_2(1-p)) = \\ &= \langle m\rangle\log_2 p - \langle M-m\rangle\log_2(1-p). \end{aligned}$$

Для случая, когда $M \to \infty$ при $N \to \infty$, $P(m)$ стремится к Гауссовому распределению:

$$P(m) = \frac{1}{\sigma_{\mathrm{M}}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(m - \langle m\rangle)^2}{2\sigma_M^2}\right),$$

$$\langle m\rangle = M_p = \frac{1}{2}N(N-1)p,$$

$$\sigma_M = \sqrt{Mp(1-p)} = \sqrt{N(N-1)p(1-p)/2}.$$

В результате получаем формулу для вычисления энтропии сетей:

$$\begin{aligned} S(N,p) &= -M\left(p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}N(N-1)(p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)). \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что приведенные выше модели энтропии сетей являются только этапами проводимого исследования.

В данной работе проводится исследование энтропии сетей на базе временных рядов фондовых рынков, содержащих известные кризисы. Фондовые рынки рассматриваются как граф, отображающий связи между участниками рынка, анализ которого проводится с точки зрения изменения энтропии в разные интервалы времени. Расчет энтропии проводился с использованием процедуры «движущегося окна», что позволило следить за изменениями показателя в приближенном к реальному времени режиме и своевременно видеть нарушения в работе сети. Изменения полученных показателей отображают важные тенденции динамики связей между участниками рынка (узлами графа). Эксперименты показали существенную зависимость энтропии от размера «движущегося окна», что позволяет сделать вывод об индивидуальности данного параметра для каждой сети и необходимости эмпирического определения критических значений. Анализ полученных результатов подтверждает чувствительность энтропии к изменениям в сети.

Литература

1. *Sol´e, R. V.* Information Theory of Complex Networks: On Evolution and Architectural Constraints / R. V. Sole, S. Valverde // Lect. Notes Phys. – Berlin, 2004. – P. 189–207.
2. *Li, J.* Network entropy based in topology configuration and its computation to random networks / J. Li [et al.] // Chinese Physics Letters. – 2008. – Vol. 25, № 11. – P. 4177–4180.