ЧИСЛО 2013 В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Вот и наступил, вопреки предсказаниям черных астрологов, долгожданный 2013 год. Каким он станет? Что принесет выпускникам школ: радость от поступления в престижный вуз или горечь разочарования от неудачи? Естественно, итоговый результат зависит прежде всего от усилий самих абитуриентов. Но недаром среди определенной части молодежи так популярны сегодня гороскопы, предсказания и нумерология.

Ведь еще великий Пифагор считал, что именно числа правят миром. Его нумерологическое учение основывалось на аксиоме, что числа скрывают в себе великую тайну Вселенной. Каков же нумерологический прогноз на 2013 год?

2013 год пройдет под знаком числа 6 (результат сложения всех цифр года). Какое место занимает шестерка в общей нумерологии?

Если рассматривать нумерологию двадцатого и начала двадцать первого века, то можно проследить такую тенденцию: в годы, проходившие под знаком числа 6, в мире часто происходили события, которые не только сами по себе были тревожными, но и имели разрушительные последствия. В эти годы поднимались восстания, осуществлялись революции и покушения на руководителей стран, смещались правительства и распускались парламенты, начинались войны и совершались теракты, делались попытки передела сфер влияния.

Периоды, соответствующие по нумерологии шестерке, тяготеют к резкой смене власти. Поэтому от 2013 года можно ждать событий, которые изменят политику многих стран. Однако не будем забывать, что 2013 год пройдет под знаком Змеи, а Змея — существо мудрое, она вряд ли допустит массовые беспорядки. Так что, скорее всего, давления на правительства будут не силовыми, а скорее интеллектуальными или правовыми и надежда на мирное урегулирование конфликтов все-таки имеется.

Перейдем к другим свойствам числа 6, которые будут влиять на нашу жизнь в 2013 году. И это влияние будет в основном положительным.

Шестерка — это число поиска гармонии, поэтому нам предстоит осознать себя как личность, определить, что в нашей жизни первично, а что — вторично. И хотя путь к гармонии, как правило, зиждется на разрушении старого и отжившего, через боль и неприятности мы все же придем к состоянию, приближенному к душевному комфорту.

Шестерка — это нечто таинственное и неведомое. Ее сложно познать, оставаясь в личностном состоянии обывателя. Она требует получения новых знаний, духовного роста, проникновения в тайны мироздания и загадки Вселенной. Многим людям окажется мало уже открытых и стандартных знаний.

Шестерка тяготеет к искусству, поэтому даже те, кто занимается абсолютно практической деятельностью, будут пробовать себя в каком-либо творчестве или станут покровительствовать театру, литературе, живописи. Возрастет количество меценатов, будут созданы новые благотворительные фонды для поддержки развития культуры.

Ключевых слов для определения года шестерки необычайно много. Это творчество, забота о ближнем, семья, дружба, любовь, брак, ответственность за других людей, взаимопомощь. Это умение не только брать, но и отдавать. Это поиск выгоды от своих действий, взаимодействие и конструктивный диалог с партнерами в бизнесе и в семье. Это тяга к искусству и просвещению. Наконец, это понимание и желание быть понятым, а также взаимность во всем.

Попробуем теперь взглянуть на число 2013 с чисто математической точки зрения.

В двоичной системе счисления оно выглядит как 11111011101, в троичной — 2202120, в пятеричной — 31023. Любопытно, что во всех этих трех представлениях суммы цифр одинаковы: $1+1+1+1+1+0+1+1+1+0+1=2+2+0+2+1+2+0=3+1+0+2+3$.

В важных с точки зрения программирования системах счисления число 2013 записывается так: в восьмеричной — 3735, в шестнадцатеричной — 7DD.

Квадрат числа 2013 равен 4052169, квадратный корень из него — 44,866468548349. Кубом числа 2013 является 8157016197, кубический корень равен 12,626449854732.

Наиболее употребительные тригонометрические функции имеют разные знаки: $\sin 2013 = 0,68956696500461$, $\cos 2013 = -0,72422192784694$, $\operatorname{tg} 2013 = -0,952148697092$.

Как и ушедший високосный 2012 наступивший 2013 год обещает стать **непростым** (число 2013 имеет делители, отличные от самого этого числа и единицы). Предыдущим простым числом было 2011, а следующим станет только 2017. Кстати, 2013-м по порядку простым числом является 17491.

К сожалению, год 2013-й вновь является **несовершенным**. Напомним, что натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих собственных делителей (т. е. делителей, отличных от самого числа). У числа 2013 таких делителей 7: 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671. Их сумма равна всего лишь 963. Примерами же совершенных чисел являются $6 = 1 + 2 + 3$ и $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Следующие совершенные числа отстоят далеко: 496, 8128, 33550336, 8589869056...

Не замечены у 2013 и **дружественные** числа. Еще пифагорейцы, жившие две с половиной тысячи лет тому назад, обнаружили, что числа 220 и 284 обладают замечательным свойством. Сумма собственных делителей числа 220 равна $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$. В свою очередь для числа 284 соответствующая сумма равна $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Эту связь между числами древние математики объявили символом дружбы. С тех пор два числа, такие, что каждое из них равно сумме собственных делителей другого, называются дружественными. Приведем несколько следующих пар дружественных чисел: 1184 и 1210, 2620 и 2924, 5020 и 5564. Как видите, ждать наступления дружественного года нам придется более шести столетий.

Что же касается других математических свойств числа 2013, то с этой точки зрения оно мало чем выделяется на фоне остальных.

Разложение числа 2013 на простые множители имеет вид $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.

Напомним, что если запись разложения имеет больше цифр, чем само число (например, $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$), то число называется **избыточным**.

Числа, разбиение которых на простые множители использует (с учетом показателей степеней, больших единицы) столько же цифр, сколько их в самом числе, называются **равноциферными** (например, $25 = 5^2$).

Числа, факторизация которых имеет меньше цифр, чем само число (например, $1701 = 3^5 \cdot 7$), называются **экономными**.

Таким образом, число 2013 относится к избыточным. Оно начинает серию из трех идущих подряд чисел, имеющих 3 разных простых множителя: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Более длинных аналогичных серий не существует, так как среди четырех подряд идущих чисел одно будет обязательно делиться на 4, и, следовательно, иметь кратный простой множитель 2. Заметим, что предыдущая такая серия начиналась с числа 1885, а следующая начнется с 2665.

Репдигит — это число, которое состоит из повторяющихся цифр (например, 333). В разных системах счисления репдигитами оказываются разные числа. Например, число 26 будет репдигитом в троичной системе счисления, ведь там оно выглядит как $(222)_3$.

Покажем, что число 2013 является репдигитом в системе счисления по основанию 13. В этой системе счисления кроме привычных нам цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 используются буквы А, В, С, обозначающие десятичные числа 10, 11 и 12. Поскольку имеет место равенство $2013 = 11 \cdot 13^2 + 11 \cdot 13^1 + 11 \cdot 13^0$, то в тринадцатеричной системе число 2013 записывается как $(ВВВ)_{13}$ и действительно является репдигитом.

К сожалению, число 2013 не является ни числом Фибоначчи (не принадлежит последовательности, начинающейся числами 0 и 1, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел), ни числом Смита (составным числом, сумма цифр которого равняется сумме цифр всех его простых множителей с учетом кратности), ни числом Цукермана (натуральным числом, которое делится на произведение своих цифр), ни даже факториалом какого-нибудь натурального числа.

Зато число 2013 связано с первыми семью цифрами интересными равенствами:

$$123 + 45 \cdot 6 \cdot 7 = 2013; 1 + 2 \cdot (3 + 4^5) - 6 \cdot 7 = 2013.$$

Красивое выражение, состоящее только из троек, дающее в результате номер наступившего года, выглядит так: $((333+33)/(3+3)) \cdot 33 = 2013$.

Еще два интересных выражения: $2013 - 123 = 1234 + 567 + 89$; $7 \cdot \sqrt{0,2013} \approx 3,14$.

Приведем несколько математических примеров, условие которых так или иначе связано с числом 2013.

Пример 1.

Все целые числа, начиная с 1, выписаны подряд. Какая цифра стоит в этой записи на 2013 месте?

Решение.

Однозначные числа занимают первые 9 мест. 90 двузначных чисел занимают следующие 180 мест. Остается $2013 - 189 = 1824$ места. Их занимают 608 трехзначных чисел, последним из которых будет число 707.

Таким образом, на 2013 месте будет стоять цифра 7.

Ответ: 7.

Пример 2.

Существует ли натуральное число, которое в 2013 раз больше суммы своих цифр?

Решение.

Пусть число A в 2013 раз больше суммы S своих цифр: $A = 2013 \cdot S$. Нетрудно показать, что разность $A - S$ делится на 9 (сделайте это самостоятельно!). Поскольку $A - S = 2012 \cdot S$, а число 2012 не делится на 9, то на 9 должно делиться число S .

Поэтому искать требуемое в условии натуральное число можно, последовательно умножая 2013 на 9, 18, 27 и т. д. И уже вторая попытка приводит к цели: $2013 \cdot 18 = 36234$.

Ответ: 36234.

Пример 3.

Первый член арифметической прогрессии равен 2012, а член этой прогрессии с номером 2013 является ее первым отрицательным членом. Какие значения может принимать разность этой прогрессии?

Решение.

$$\text{По условию задачи } \begin{cases} a_1 = 2012, \\ a_{2013} < 0, \\ a_{2012} \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Поэтому } \begin{cases} a_1 = 2012, \\ 2012 + 2012d < 0, \\ 2012 + 2011d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2012, \\ d < -1, \\ d \geq -\frac{2012}{2011} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2012}{2011} \leq d < -1.$$

Ответ: $d \in \left[-\frac{2012}{2011}; -1 \right)$.

Пример 4.

Доказать неравенство $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < \frac{2012}{2013}$.

Решение.

Запишем ряд очевидных неравенств:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2013^2} < \frac{1}{2012 \cdot 2013} = \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}.$$

Складывая эти неравенства почленно, получим:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < 1 - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013},$$

что и требовалось доказать.

Пример 5.

Решить уравнение ${}^{2013}\sqrt{(1+x)^2} - {}^{2013}\sqrt{(1-x)^2} = {}^{2013}\sqrt{1-x^2}$.

Решение.

Очевидно, что $x=1$ не является корнем уравнения. Поэтому после деления обеих частей уравнения на ${}^{2013}\sqrt{(1-x)^2}$ оно перейдет в равносильное: ${}^{2013}\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - 1 = {}^{2013}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Обозначая ${}^{2013}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ через t , получим уравнение $t^2 - 1 = t$, корнями которого являются

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \quad \text{Таким образом,} \quad {}^{2013}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1+x}{1-x} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{2013} \quad \text{и,}$$

$$\text{следовательно, } x_{1,2} = \frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{2013} - 1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{2013} + 1}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2013} - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2013} + 1}, \quad x_2 = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2013} - 1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2013} + 1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти 2013-ю цифру после запятой в десятичной записи дроби $\frac{1}{7}$.

Ответ: 2.

2. Чему равно значение выражения $\left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1+\frac{1}{2013}\right)$?

Ответ: 1007.

3. Найти произведение корней уравнения ${}^{2013}\sqrt{2013} \cdot x^{\log_{2013} x} = x^{12}$.

Ответ: 2013^{12} .

4. Какая дата наступит ровно через 2013 часов 2013 минут после 20 часов 13 минут 20.12.2012?

Ответ: 16.03.2013.

5. Известно, что сумма первого и пятого членов некоторой арифметической прогрессии равна -46 , а произведение второго и третьего членов равняется 575 . Сколько членов прогрессии нужно сложить, чтобы сумма была равна 2013 ?

Ответ: 61.

Подготовил А. С. Шибут