

И.БОЛЬШАКОВА, М.КУПРИЯНОВА

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Каждый инвестор стремится составить такой портфель ценных бумаг, который обеспечивал бы максимально возможный доход с минимальным риском. Возникают две проблемы: как спрогнозировать доход на основе исторических данных и как измерять риск.

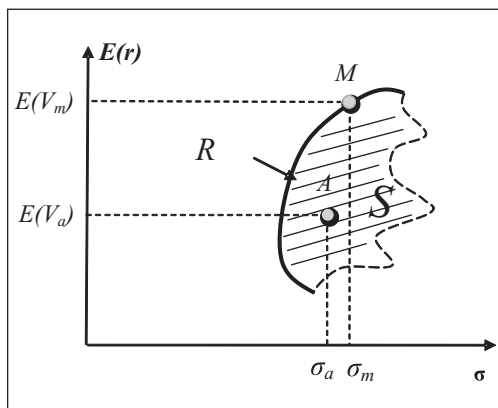


Рис. 1. Соотношение доходности и риска

В классической постановке Марковица проблема выбора оптимального портфеля сводится к теории об эффективном наборе портфелей, или о так называемой границе эффективности. Суть теории: если инвестору доступны n ценных бумаг, каждая со своей ожидаемой доходностью $E(r_i)$, где $i = 1, 2, \dots, n$, то найдется только одна комбинация ценных бумаг в портфеле, минимизирующая риск портфеля при каждом заданном значении ожидаемой доходности портфеля. Рис. 1 показывает, что какую бы величину ожидаемой доходности ни определил инвестор (например, $E(r_m)$), всегда путем перебора весов ценных бумаг портфеля можно найти такой портфель, при котором уровень риска достигает минимального значения (на рис. 1 – точка M).

Ожидаемая доходность ценной бумаги в модели Марковица рассчитывается как математическое ожидание ее доходностей за предшествующий отрезок времени, риск – как сред-

неквадратическое отклонение этих доходностей, а ковариация – по формуле $\sigma_{ij} = V_{ij}\sigma_i\sigma_j$, где V_{ij} – коэффициент парной линейной корреляции между доходностями двух активов.

Можно сделать два важных вывода: во-первых, если коэффициенты корреляции между доходностями активов в разных портфелях постоянны, то при изменении соотношения ценных бумаг в портфеле меняется и риск портфеля; во-вторых, для любого портфеля с понижением коэффициента корреляции бумаг уменьшается и риск портфеля.

Набор портфелей, которые минимизируют уровень риска при каждой величине ожидаемой доходности, образует так называемую границу эффективности (на рис. 1 это линия R). Как видно из данного рисунка, при перемещении по границе вверх-вправо величины $E(r)$ и σ увеличиваются, а при движении вниз-влево – уменьшаются.

Эффективный портфель – это портфель, который обеспечивает минимальный риск при заданной величине $E(r)$ или максимальный доход при заданном уровне риска.

Задача инвестора в модели Марковица сводится к следующему: из набора портфелей с ожидаемой нормой отдачи $E(r_p)$ необходимо найти такой, который обеспечивал бы минимальный уровень риска. Иными словами, задачу инвестора можно свести к решению следующей системы:

$$\begin{cases} E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i [E(r_i)] \rightarrow \max; \\ \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j} \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1; \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

У модели существует ряд недостатков, на которые следует обратить внимание.

1. Модель строится на основании средней доходности по данным прошлых периодов, поэтому ее рационально использовать только при стабильном состоянии фондового рынка.

2. Не всегда выполняется предпосылка о нормальном распределении доходности, следовательно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение не могут служить адекватными мерами доходности и риска.

3. Существуют ситуации, когда кратность стоимости активов приводит к вынужденному добавлению целочисленных ограничений. Это ведет к росту размерности задачи и трудоемкости ее решения.



Приведем пример портфельной задачи Марковица с акциями «голубых фишек» российской фондовой биржи по состоянию на начало 2011 года¹: Газпром, Роснефть, ЛУКОЙЛ, СургутНГ, НорНикель ГМК, ИНТЕР РАО ЕЭС, Северсталь, Сбербанк России, Банк ВТБ и РусГидро.

В расчете ожидаемой доходности портфеля будем использовать реальные данные за 2010 год, отражающие динамику стоимости акций за период с 11.01.2010 по 30.12.2010 (248 торговых дней)².

Доходность каждой ценной бумаги можно рассчитывать по одному из следующих правил:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (\text{доходность как процент к инвестированной сумме}). \quad (1)$$

$$R_t = \ln P_t - mP_{t-1} \quad (\text{модель Фамы}). \quad (2)$$

Здесь P_t – цена ценной бумаги в период t .

Существует причина, почему вместо подсчета доходности как процента к инвестированной сумме стоит использовать логарифмическое изменение цены. Стоимость акции всегда связана с ситуацией на бирже. Дисперсия обычного изменения цены на актив есть возрастающая функция от изменения уровня цен на фондовом рынке. Взятие же логарифма нейтрализует воздействие биржи, что позволяет получить более «чистые» оценки и, как результат, построить более эффективный портфель³.

1. Доходность как процент к инвестированной сумме

Рассчитаем по формуле (1) доходность акций 10 «голубых фишек» российского фондового рынка за каждый из 12 предшествующих месяцев (см. табл. 1).

Таблица 1

Месячная доходность акций компаний в 2010 году, вычисленная как процент к инвестированной сумме

	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Газпром	-3,90%	-9,87%	3,78%	-3,98%	-6,64%	-7,30%
Роснефть	-13,87%	0,93%	1,39%	-1,19%	-4,09%	-16,51%
ЛУКОЙЛ	-4,97%	-4,17%	5,97%	-1,59%	-10,32%	5,95%
СургутНГ	-10,52%	-1,86%	18,68%	-2,33%	-4,18%	-1,01%
НорНикель ГМК	0,20%	0,61%	19,13%	-2,31%	-8,03%	-12,06%
Северсталь	19,11%	0,53%	17,70%	-7,33%	-12,16%	-9,62%
Сбербанк России	0,24%	-10,01%	10,86%	-11,50%	-9,98%	6,47%
Банк ВТБ	1,22%	0,13%	7,87%	-3,96%	-5,79%	-0,27%
РусГидро	8,52%	0,31%	27,13%	1,46%	-0,30%	-10,25%
ИНТЕР РАО ЕЭС	-3,45%	-13,66%	39,90%	-12,87%	-5,59%	-5,92%
	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Газпром	14,64%	-4,07%	0,42%	6,01%	5,19%	7,88%
Роснефть	11,20%	-5,20%	5,28%	4,76%	-3,01%	3,60%
ЛУКОЙЛ	9,71%	-5,52%	6,45%	0,20%	1,34%	-1,91%
СургутНГ	13,72%	-5,67%	0,89%	4,15%	-2,58%	6,57%
НорНикель ГМК	15,15%	2,98%	-0,28%	7,79%	8,67%	17,40%
Северсталь	23,21%	2,08%	19,95%	-5,76%	6,23%	13,80%
Сбербанк России	16,43%	-8,36%	11,43%	16,46%	0,20%	1,28%
Банк ВТБ	13,29%	-1,81%	8,99%	17,06%	-2,03%	-0,89%
РусГидро	8,39%	-1,61%	-0,88%	0,89%	2,64%	0,55%
ИНТЕР РАО ЕЭС	-3,37%	-4,42%	22,87%	-7,72%	3,22%	-0,21%

Средняя доходность $E(r_i)$ определяется как среднеарифметическое исторических доходностей за 12 месяцев. В результате получим 10-мерный вектор:

$$r = \{0,18 = 1,3925, 0,095, 1,32167, 4,11917, 5,645, 1,96, 2,8175, 3,07083, 0,724167\}.$$

Матрица ковариаций рассчитывается по правилу $\sigma_{ij} = V_{ij}\sigma_i\sigma_j$, где V_{ij} – коэффициент парной линейной корреляции между доходностями двух активов.

Оптимальный портфель задачи Марковица с гарантированным 5-процентным доходом найдем с помощью системы Wolfram Mathematica 7.0.

¹ По данным РБК.

² <http://export.rbc.ru/>

³ Fama E.F. The Behavior of Stock-Market Prices // The Journal of Business, Vol. 38, No. 1, 1965. PP.34-105.

Полученный результат может быть интерпретирован так: гарантированный 5-процентный доход требует 65,16% капитала вложить в акции Северстали, 26,12% – в акции НорНикель ГМК, 8,72% – в акции Банка ВТБ. При этом доходность составит 5%, а риск – 10,49%.

Часто двухкритериальную задачу Марковица заменяют однокритериальной задачей с параметром $\lambda \in [0;1]$, который означает риск инвестора: чем меньше λ , тем менее склонен инвестор к риску. Решим полученную задачу с шагом 0,1 (результат представлен в табл. 2).

Таблица 2

Соотношение доходности и риска

	Агрессивность инвестора (склонность к риску)										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Газпром	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Роснефть	21,53	16,56	9,96	–	–	–	–	–	–	–	–
ЛУКОЙЛ	59,75	55,44	49,64	41,43	27,54	–	–	–	–	–	–
СургутНГ	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
НорНикель ГМК	–	–	–	2,42	6,78	10,5	15,25	25,37	5,88	1,05	–
Северсталь	–	–	–	–	–	8,37	17,57	38,49	94,12	98,95	1
Сбербанк России	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Банк ВТБ	–	7,17	16,9	30,27	39,64	56,94	50,73	36,14	–	–	–
РусГидро	18,72	20,83	23,5	25,88	26,04	24,19	16,45	–	–	–	–
ИНТЕР РАО ЕЭС	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Доходность портфеля для разного уровня риска											
	-5,23	-4,66	-4,04	-3,36	-2,6	-1,71	-0,69	0,45	1,96	3,8	5,65

12

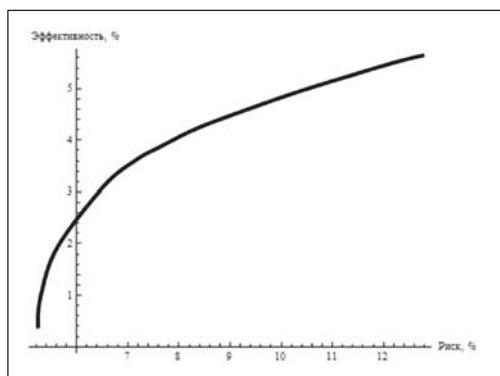


Рис. 2. Соотношение эффективности и риска

При $\lambda = 0$ инвестор радикально консервативен, а при $\lambda = 1$ – экстремально агрессивен. Консервативный инвестор вкладывает 21,53% капитала в акции Роснефти, 59,75% – в акции ЛУКОЙЛа, 18,72% – в акции РусГидро. Его убыток не превысит 5,23%. Агрессивный инвестор 100% капитала вложит в акции Северстали. Заметим, что только при $\lambda = 0,7$ доходность больше нуля (см. рис. 2).

При помощи функции *ParametricPlot* построим график зависимости между риском и эффективностью:

2. Доходность по модели Фамы

Подсчитаем доходность портфеля для тех же компаний по модели Фамы.

Для формирования портфеля с гарантированным, например 4-процентным доходом, необходимо 51,18% капитала вложить в акции Северстали, 26,64% – в акции НорНикель ГМК, 22,19% – в акции Банка ВТБ.

Оптимальные портфели, полученные в результате применения модели Фамы, схожи с результатами, полученными до этого с применением формулы доходности как процента к инвестированной сумме. Но происходит сдвиг в значениях месячной доходности. Если ранее максимальная доходность портфеля составляла 5,65%, то в модели Фамы она достигает лишь 4,81%. Наиболее агрессивный инвестор все так же вложит 100% капитала в акции Северстали. Консервативный же диверсифицирует портфель между акциями Роснефти, ЛУКОЙЛа, Банка ВТБ и РусГидро, при этом акции Банка ВТБ приобретут значимую долю, в отличие от модели, рассмотренной до этого.

3. Проверка полученных результатов

Допустим, мы решили зафиксировать уровень дохода на уровне 4%. Рассчитаем доходность портфеля, полученного в результате применения модели Марковица для доходностей отдельных активов, рассчитанных как процент к инвестированной сумме, и для доходностей, рассчитанных по модели Фамы (табл. 3).

Таблица 3

Доходность портфеля активов

	Доходность как процент к инвестированной сумме	Доходность по модели Ю.Фамы
Январь	0,04835823	0,042582567
Февраль	-0,037974464	-0,028805894
Март	0,02799929	0,034088997

Как видим, по первой модели инвестор, вложив 25,3% средств в акции НорНикель ГМК, 37,2% – в акции Северстали, 37,5% – в акции Банка ВТБ, получил бы доход 4,8% в январе, 2,7% в марте и потерял бы 3,8% в феврале.

При подсчете доходности по модели Фамы инвестор направил бы 51,18% капитала в акции Северстали, 26,64% – в акции НорНикель ГМК, 22,19% – в акции Банка ВТБ и получил бы 4,2% в январе, – 2,9% в феврале и 3,4% в марте.

Агрессивные инвесторы, которые не диверсифицировали бы портфель, а направили 100% капитала в акции Северстали, несмотря на высокий риск, остались бы в выигрыше все три месяца. Их доход составил бы 3,2% в январе, 1,45% – в феврале, 3,04% – в марте.

4. Модель Конно-Ямазаки

Классическая модель Марковица не получила широкого практического распространения, в первую очередь из-за сложности решения задач квадратичного программирования при большом количестве активов ($n > 500$). Одну из попыток упрощения модели Марковица предприняли Г.Конно и Г.Ямазаки, в 1991 году предложив MAD-модель (Mean Absolute Deviation) с методикой расчета риска в метрике, в которой отклонение представляет собой сумму абсолютных значений:

$$\sigma(x) = E \left[\left| \sum_{j=1}^n r_j x_j - E \left[\sum_{j=1}^n r_j x_j \right] \right| \right].$$

При введении вспомогательных переменных y_t получаем модель с условиями:

$$\begin{cases} E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i [E(r_i)] \rightarrow \max; \\ \sum_{t=1}^T y_t \rightarrow \min; \\ y_t + \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \geq 0, t = 1, \dots, T; \\ y_t - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \geq 0, t = 1, \dots, T; \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{cases}$$

Реализуем данную модель в Wolfram Mathematica на примере тех же акций 10 «голубых фишек» фондовой биржи РФ.

Получим, что инвестор 6,94% капитала вложит в акции Роснефти, 70,12% – в ЛУКОЙЛ, 22,94% – в РусГидро. Риск при этом составит 5,35%, а доходность достигнет 0,67%. Результаты применения данной модели отличаются от результатов использования модели Марковица: по Марковицу, для заданного уровня риска доход может быть почти в два раза выше. При этом 8,58% капитала инвестор вложит в Роснефть, 48,38% – в ЛУКОЙЛ, 18,96% – в Банк БТБ, 24,08% – в РусГидро. Что касается сравнения прогнозных качеств двух моделей, то при оценке риска в абсолютной метрике мы добиваемся лучших результатов (табл. 4).

Таблица 4

	Модель оценки риска в метрике Минковского			Модель Марковица		
Месяц	Январь	Февраль	Март	Январь	Февраль	Март
Доход	2,6619%	7,8237%	-0,86%	2,5178%	4,207%	-1,227%



Модель Конно-Ямазаки позволяет найти оптимальный портфель без вычисления матрицы ковариаций, что значительно упрощает расчеты. Эффективность модели была доказана ее авторами в результате применения на Токийской фондовой бирже⁴.

5. Использование модели Шарпа для формирования портфеля

Модель Шарпа строится на предположении, что доходность акции может быть связана с доходностью рынка в целом. В основе метода Шарпа лежит метод линейного регрессионного анализа, который позволяет связать независимую переменную X и зависимую переменную Y в выражении типа $Y = \alpha + \beta X$. Под независимым индексом в модели Шарпа понимается рыночный индекс. В частности, У. Шарп использовал норму отдачи r_m , вычисленную на основе рыночного индекса Standart and Poor's (S&P500).

Для российского рынка воспользуемся фондовым индексом RTS (табл. 5).

Таблица 5

Месячное изменение индекса RTS в 2010 году*

	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Индекс RTS	-2,6%	-2,79%	11,11%	-5,63%	-9,49%	-6,20%
	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Индекс RTS	18,19%	-5,05%	5,65%	4,47%	2,08%	8,36%

* <http://www.rts.ru/>

С помощью системы Wolfram Mathematica вычислим параметры регрессионной модели α_i и β_i и составим уравнения зависимости доходности каждой ценной бумаги от доходности рынка в целом.

Об адекватности составленных моделей можно судить по значению коэффициента детерминации R^2 , который превосходит 0,5 для всех акций, кроме акций РусГидро (0,304959) и ИНТЕР ПАО ЕЭС (0,246377). Следовательно, доходность акций этих компаний не имеет сильной линейной зависимости от доходности рынка в целом, и построенная для этих активов регрессионная модель не имеет практической значимости.

Таблица 6

Зависимость доходности «голубых фишек» от доходности рынка

Компания	Уравнение зависимости от индекса RTS	Коэффициент детерминации
Газпром	$-0.92112 + 0.840522x$	0,80952
Роснефть	$-2.44746 + 0.69942x$	0,53593
ЛУКОЙЛ	$-1.85678 + 0.636537x$	0,79186
СургутНГ	$0.0672617 + 0.83165x$	0,69083
НорНикель ГМК	$2.58802 + 1.00518x$	0,720429
Северсталь	$3.86992 + 1.17685x$	0,58161
Сбербанк России-3	$0.514122 + 0.958593x$	0,582281
Банк ВТБ	$1.8603 + 0.634608x$	0,528449
РусГидро	$2.16822 + 0.598421x$	0,304959
ИНТЕР ПАО ЕЭС	$-0.066983 + 0.929169x$	0,246377

Общий риск портфеля состоит из двух частей – рыночного риска и собственного риска. Оптимизация по Шарпу позволяет свести собственный риск портфеля к минимуму.

Итак, на базе аналитического аппарата моделей Марковица, Шарпа, Конно-Ямазаки и на основе исторических баз данных российской торговой системы (РТС) были рассмотрены примеры оптимизации портфеля активов для решения вопроса о краткосрочном портфельном инвестировании (до 1 года).

Оценивая риск и доходность российского рынка ценных бумаг, можно лишь с определенной долей вероятности предположить, что будущая ситуация на фондовой бирже будет укладываться в рамки полученных статистических данных. Наличие огромного количества факторов, напрямую или косвенно влияющих на динамику котируемых эмитентов, не позволяет однозначно спрогнозировать и сократить до нуля риск потери инвестиций, но свести его до минимума с оптимальной доходностью возможно.

⁴ Konno H., Yamazaki H. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market // Management Science, Vol. 37, No.5 (May, 1991). P.519-531.