УДК 512.542

СКРЕЩЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТЕЛА КВАТЕРНИОНОВ И ЧЕТВЕРНОЙ ГРУППЫ

В. В. КУРСОВ[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследована структура обобщенного скрещенного произведения произвольного тела кватернионов и четверной группы относительно системы факторов. Хорошо известно, что такое скрещенное произведение является полупростым кольцом. Показано, что при определенных условиях скрещенное произведение простой алгебры и ее группы внутренних автоморфизмов является простой центральной алгеброй. Отмечено, что при выяснении того, при каких условиях скрещенное произведение является алгеброй с делением, возникают трудности, связанные в общем случае с анализом систем линейных уравнений, определенных над некоммутативными кольцами. В терминах анизотропных квадратичных форм приведены достаточные условия, при которых указанное скрещенное произведение является алгеброй с делением. Доказано, что такое обобщенное скрещенное произведение есть тензорное произведение двух тел кватернионов.

Ключевые слова: кватернион; тело кватернионов; четверная группа; скрещенное произведение; алгебра; ассоциативная алгебра; простая алгебра; алгебра с делением; система факторов; тензорное произведение.

A CROSSED PRODUCT OF A SKEW FIELD OF QUATERNIONS AND FOUR-GROUP

V. V. KURSOV[a]

[a]*Belarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus*

The article considers construction of generalized crossed product of an arbitrary quaternions skew field and Klein four-group relative to factor system. It is well known that such crossed product is semisimple ring. Under specific conditions it is easy to show that crossed product of simple algebra and its inner automorphism group is central simple algebra.

Образец цитирования:
Курсов В. В. Скрещенное произведение тела кватернионов и четверной группы // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 12–16.

For citation:
Kursov V. V. A crossed product of a skew field of quaternions and four-group. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 12–16 (in Russ.).

Автор:
Валерий Владимирович Курсов – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации, заместитель декана механико-математического факультета.

Author:
Valery Kursov, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher algebra and information security, deputy dean of the faculty of mechanics and mathematics.
kursov@bsu.by

Finding out the conditions under which the crossed product is division algebra we face to difficulties of general case linked to analysis of system of linear equations defined over non-commutative rings. In the terms of anisotropic quadratic forms, there are sufficient conditions under those the crossed product of skew field of quaternions and four-group relative to factor system is division algebra. In addition, it is proved that the crossed product is the tensor product of two quaternions skew fields.

Key words: quaternion; quaternions skew field; Klein four-group; crossed product; algebra; associative algebra; simple algebra; division algebra; factor system; tensor product.

Классическое скрещенное произведение поля и его группы Галуа, впервые появившееся у Э. Нётер, – один из наиболее эффективных инструментов при изучении конечномерных алгебр. Впоследствии эта конструкция обобщалась с различных точек зрения [1; 2]. В ряде работ при определенных условиях была установлена полупростота и простота скрещенных произведений [3–5]. Доказательство того, что данное обобщенное скрещенное произведение является телом, – сложная задача, поскольку даже в специальных случаях не существует эффективных способов установления обратимости элементов скрещенного произведения.

В настоящей работе в терминах, относящихся к квадратичным формам, формулируются условия, при выполнении которых скрещенное произведение тела кватернионов и четверной группы Клейна является алгеброй с делением.

Пусть F – поле характеристики, отличной от 2 с мультипликативной группой F^*. Для $\alpha, \beta \in F^*$ через $D = \left(\dfrac{\alpha, \beta}{F}\right)$ обозначим тело кватернионов над F с базисными элементами 1, i, j, k как $i^2 = \alpha$; $j^2 = \beta$; $k^2 = -\alpha\beta$, при этом $\nu : D^* \to F^*$ – гомоморфизм приведенной нормы. Четверная группа $K_4 = \{e, \sigma, \tau, \sigma\tau \mid \sigma\tau = \tau\sigma, \sigma^2 = e, \tau^2 = e\}$ может быть реализована как группа внутренних автоморфизмов тела D: $\sigma = \mathrm{Int}(i)$; $\tau = \mathrm{Int}(j)$; $\sigma\tau = \mathrm{Int}(k)$; e – тождественный автоморфизм; $\mathrm{Int}(g)(x) = gxg^{-1}$, $x \in D$, $g \in D^*$. Пусть $f : K_4 \times K_4 \to F^*$ – система факторов на K_4 со значениями в F^* [6]. Поскольку абелева группа F^x есть модуль с тривиальным действием группы K_4, то систему факторов будем считать симметричной и нормализованной [7]:

$$f(x, y) = f(y, x) \text{ и } f(x, e) = 1, \text{ где } x, y \in K_4.$$

Рассмотрим свободный левый D-модуль $S = D + Du_\sigma + Du_\tau + Du_{\sigma\tau}$ с базисными элементами 1, u_σ, u_τ, $u_{\sigma\tau}$, который естественным образом превращается в ассоциативную алгебру относительно умножения, задаваемого по следующему правилу:

$$u_x u_y = f(x, y) u_{xy},\ y \in K_4;\ u_x\lambda = \lambda^x u_x,\ \lambda \in D,$$

где λ^x – действие автоморфизма x на элементе λ. Назовем $S = (K_4, D, f)$ обобщенным скрещенным произведением группы K_4 и тела D относительно системы факторов f.

В этих обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма. *Алгебра S является простой алгеброй размерности 16 над своим центром F.*

Доказательство. Алгебра S является полупростой [3]. Рассмотрим в ней центральный элемент $a = x_0 + x_1u_\sigma + x_2u_\tau + x_3u_{\sigma\tau}$, $x_i \in D$. Поскольку для любого $d \in D$ $da = ad$, мы получим равенства:

$$dx_0 = x_0 d,\ dx_1 = x_1 d^\sigma,\ dx_2 = x_2 d^\tau,\ dx_3 = x_3 d^{\sigma\tau}.$$

Отсюда следует, что $x_1 = f_1 i$; $x_2 = f_2 j$; $x_3 = f_3 k$; $x_0, x_1, x_2, x_3 \in F$. Поскольку $au_\sigma = u_\sigma a$, симметричность системы факторов приводит к $a = x_0 + f_1 iu_\sigma$, по той же причине из условия $au_\tau = u_\tau a$ следует, что $a = x_0 \in F$. Лемма доказана.

Определение. Система факторов $f : K_4 \times K_4 \to F^*$ называется согласованной со структурой тела $D = \left(\dfrac{\alpha, \beta}{F}\right)$, если выполнены условия

$$\alpha f(\sigma, \sigma) \notin F^{*2};\ -\beta f(\tau, \tau) \notin F^{*2};\ -\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) \notin F^{*2}.$$

Пусть $S_1 = D + Du_{\sigma\tau}$ – скрещенное произведение D с циклической группой, порожденной автоморфизмом $\sigma\tau$.

Предложение. Пусть система факторов согласована со структурой тела D; квадратичная форма $\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_3^2$ анизотропна над F. Тогда центр $P = F + Fku_{\sigma\tau}$ алгебры S_1 является полем, и $S_1 = \left(\frac{\alpha, \beta}{P}\right)$ есть тело кватернионов над P.

Доказательство. Рассуждения, использованные при доказательстве леммы, показывают, что центр S_1 имеет вид $P = F + Fku_{\sigma\tau}$. Покажем, что ненулевой элемент из P обратим в P. Пусть $a = f_0 + f_1 ku_{\sigma\tau} \in P$. Найдем подходящие $x, y \in F$ так, чтобы выполнялось равенство

$$(f_0 + f_1 ku_{\sigma\tau})(x + yku_{\sigma\tau}) = 1,$$

которое эквивалентно системе соотношений

$$f_0 x - f_1 y \cdot \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) = 1, \; f_1 x + f_0 y = 0.$$

Данная система разрешима относительно $x, y \in F$, поскольку в силу согласованности системы факторов $f_0^2 + f_1^2 \cdot \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) \neq 0$. Таким образом, S_1 будет простой алгеброй размерности 4 над полем P. Для ненулевого элемента $a + bu_{\sigma\tau} \in S_1$ обратный элемент будем искать в виде $x + yu_{\sigma\tau}$ для некоторых $x, y \in D$. Можно утверждать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$, так как в противном случае элемент $a + bu_{\sigma\tau}$ обратим. Равенство $(a + bu_{\sigma\tau})(x + yu_{\sigma\tau}) = 1$ эквивалентно системе соотношений

$$ax + by^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau) = 1, \; ay + bx^{\sigma\tau} = 0. \tag{1}$$

Из равенств (1), ввиду предположения об a и b, получаем:

$$y = -a^{-1}bx^{\sigma\tau}, \; \left(a - ba^{-\sigma\tau}b^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau)\right)x = 1. \tag{2}$$

Для данных $a, b \in D$ находим $x, y \in D^*$ в (2), если только $a - ba^{-\sigma\tau}b^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau) \neq 0$ для любых ненулевых $a, b \in D$. Предположим противное и получим $1 = (a^{-1}b)(a^{-1}b)^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau)$. Обозначая $\xi = a^{-1}b \in D^*$, видим, что в теле D разрешимо уравнение, которое назовем характеристическим для автоморфизма $\sigma\tau$:

$$\xi \cdot \xi^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau) = 1, \; \xi \in D, \; \xi \neq 0. \tag{3}$$

Пусть ненулевой элемент $\xi = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k, \; c_i \in F$, удовлетворяет (3). Тогда, обозначая $\mu = \nu(\xi)^{-1} f(\sigma\tau, \sigma\tau)^{-1}$, получим, что (3) эквивалентно следующему равенству:

$$k(c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k)k^{-1} = \mu(c_0 - c_1 i - c_2 j - c_3 k). \tag{4}$$

Равенство (4) дает систему соотношений

$$c_0 = \mu c_0, \; c_1 = \mu c_1, \; c_2 = \mu c_2, \; c_3 = -\mu c_3. \tag{5}$$

Если в (5) $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, то в силу того, что $c_3 \neq 0$, получаем $\mu = -1$ и $-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) = c_3^{-2} \in F^{*2}$, что противоречит согласованности системы факторов. Если среди коэффициентов c_0, c_1, c_2 есть ненулевой, то $\mu = 1$ и $c_3 = 0$. В этом случае $\nu(\xi) = c_0^2 - \alpha c_1^2 - \beta c_2^2 = f(\sigma\tau, \sigma\tau)^{-1}$ или $c_0^2 - \alpha c_1^2 - \beta c_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)^{-1} = 0$. Полученное равенство эквивалентно тому, что форма $\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_3^2$ изотропна. Действительно, если $x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_3^2 = 0$ и $x_3 = 0$, то приведенная норма $\nu(\eta) = 0 = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2$ для ненулевого элемента $\eta = x_0 + x_1 i + x_2 j \in D$, что невозможно. В случае если $x_3 \neq 0$, то, разделив на $x_3^2 f(\sigma\tau, \sigma\tau)^2$, получим требуемое. Таким образом, уравнение (3) не имеет решений и S_1 является телом. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} S_1 = D + Dku_{\sigma\tau} &= (F + Fi + Fj + Fk) + (F + Fi + Fj + Fk)ku_{\sigma\tau} = \\ &= (F + Fku_{\sigma\tau}) + (F + Fku_{\sigma\tau})i + (F + Fku_{\sigma\tau})j + (F + Fku_{\sigma\tau})k = \\ &= P + Pi + Pj + Pk = \left(\frac{\alpha, \beta}{P}\right). \end{aligned}$$

Основной результат статьи – следующая теорема.

Теорема. *Пусть система факторов f согласована со структурой тела D и выполнены следующие условия:*

1) форма $\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_3^2$ *анизотропна над полем F;*

2) форма $\varphi_2(y_0, y_1, y_2, y_3) = y_0^2 - f(\sigma, \sigma)y_1^2 - \beta y_2^2 - \alpha\beta y_3^2$ *анизотропна над квадратичным расширением* $F\left(\sqrt{-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)}\right)$ *поля F.*

Тогда $S = (K_4, D, f)$ *является телом индекса 4 и представима в виде произведения двух тел кватернионов:*

$$(K_4, D, f) = \left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right) \otimes_F \left(\frac{\alpha f(\sigma, \sigma),\ -\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)}{F}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что $S_1 = D + Du_\sigma + Du_\tau + Du_{\sigma\tau} = S_1 + S_1 u_\sigma$ – скрещенное произведение тела S_1 с циклической группой, порожденной автоморфизмом σ. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения, получаем, что, если ненулевой элемент в S не имеет обратного, в теле S_1 характеристическое уравнение относительно σ имеет ненулевое решение:

$$\xi^\sigma \cdot \xi f(\sigma, \sigma) = 1, \xi \neq 0,\ \xi \in S_1. \tag{6}$$

Пусть $\xi = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k,\ c_i \in P$, – ненулевое решение в (6). Обозначая $\mu = \nu(\xi)^{-1} f(\sigma, \sigma)^{-1}$ из (6), получаем соотношения:

$$c_0 = \mu c_0,\ c_1 = -\mu c_1,\ c_2 = \mu c_2,\ c_3 = \mu c_3. \tag{7}$$

Если в (7) $c_0 = c_2 = c_3 = 0$, то из (7) следует, что $\alpha c_1^2 = f(\sigma, \sigma)^{-1} = 0$, где $c_1 \in P;\ c_1 \neq 0$, откуда $\alpha f(\sigma, \sigma) \in P^{*2}$. Пусть $t = x_0 + x_1 k u_{\sigma\tau} \in P,\ t \neq 0,\ x_0 x_1 \in F;\ t^2 = \alpha f(\sigma, \sigma).$ Отсюда следует, что

$$x_0^2 + x_1^2 k^2 f(\sigma\tau, \sigma\tau) = \alpha f(\sigma, \sigma) \text{ и } x_0 x_1 = 0. \tag{8}$$

Если в (8) $x_1 = 0$, то $x_0^2 = \alpha f(\sigma, \sigma),$ что противоречит согласованности системы факторов. Если $x_0 = 0$, то получаем $-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_1^2 = \alpha f(\sigma, \sigma)$. Для системы факторов имеет место равенство

$$f(\sigma,\tau)^2 f(\sigma\tau, \sigma\tau) = f(\sigma, \sigma) f(\tau, \tau).$$

Тогда предыдущее соотношение приводит к $-\beta f(\tau, \tau) \in F^{*2},$ что противоречит согласованности системы факторов. Таким образом, в (7) среди c_0, c_2, c_3 есть, по крайней мере, один ненулевой коэффициент, поэтому $\mu = 1$ и $c_1 = 0$. Значит, в характеристическом уравнении $\xi = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$ имеет место равенство

$$c_0^2 - f(\sigma, \sigma)^{-1} - \beta c_2^2 + \alpha\beta c_3^2 = 0.$$

Это означает, что форма φ_2 изотропна над полем P.

Пусть $\varphi_2(y_0, y_1, y_2, y_3) = y_0^2 - f(\sigma, \sigma)y_1^2 - \beta y_2^2 - \alpha\beta y_3^2 = 0;\quad y_0 = s_0 + t_0 k u_{\sigma\tau},\quad y_1 = s_1 + t_1 k u_{\sigma\tau},\quad y_2 = s_2 + t_2 k u_{\sigma\tau},\quad y_3 = s_3 + t_3 k u_{\sigma\tau}$ и $s_i, t_i \in F$, тогда предыдущее равенство эквивалентно системе соотношений

$$\begin{gathered} s_0^2 - f(\sigma, \sigma)s_1^2 - \beta s_2^2 + \alpha\beta s_3^2 - \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)\left(t_0^2 - f(\sigma, \sigma)t_1^2 - \beta t_2^2 + \alpha\beta t_3^2\right) = 0, \\ s_0 t_0 - f(\sigma, \sigma)s_1 t_1 - \beta s_2 t_2 + \alpha\beta s_3 t_3 = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Предположим теперь, что векторное пространство $V = F^4$ снабжено невырожденной симметричной билинейной формой $\varphi_2 : V \times V \to F,$ задаваемой диагональной матрицей $D = \operatorname{diag}\left[1,\ -f(\sigma, \sigma),\ -\beta,\ \alpha\beta\right].$ Перепишем соотношения (9) в виде:

$$\begin{gathered} \varphi_2(s_0, s_1, s_2, s_3) - \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)\varphi_2(t_0, t_1, t_2, t_3) = 0, \\ \varphi_2(s_0, s_1, s_2, s_3;\ t_0, t_1, t_2, t_3) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Пусть $u = \left(s_0, s_1, s_2, s_3\right)$ и $\nu = \left(t_0, t_1, t_2, t_3\right)$ – векторы из V. Если u – нулевой вектор, то ν – ненулевой вектор и $\varphi_2\left(\nu\right) = 0,$ что невозможно в силу анизотропности φ_2. Аналогичное рассуждение справедливо и для вектора ν. Таким образом, мы можем предполагать, что u и ν – ненулевые и анизотропные векторы. Из (10) следует, что они ортогональны относительно φ_2, значит, u и ν линейно независимы.

Пусть теперь $\lambda, \mu \in F\left(\sqrt{-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)}\right),$ тогда

$$\varphi_2\left(\lambda u + \mu\nu\right) = \varphi_2\left(\lambda u + \mu\nu, \lambda u + \mu\nu\right) = \lambda^2\varphi_2\left(u\right) + \mu^2\varphi_2\left(\nu\right) =$$
$$= \lambda^2\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)\varphi_2\left(\nu\right) + \mu^2\varphi_2\left(\nu\right) = \left(\lambda^2\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) + \mu^2\right)\varphi_2\left(\nu\right).$$

Выберем в квадратичном расширении $\lambda, \mu \in F\left(\sqrt{-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)}\right)$ так, чтобы $\lambda^2\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) + \mu^2 = 0.$ Тогда $\varphi_2\left(\lambda u + \mu\nu\right) = 0,$ значит, ненулевой вектор $w = \lambda u + \mu\nu$ изотропен относительно φ_2, что противоречит условию.

Пусть теперь $C_S\left(D\right)$ – централизатор тела D в теле S. Тогда наблюдаем, что $C_S\left(D\right) = \left\{f_0 + f_1 iu_\sigma + \right.$ $\left. + f_2 ju_\tau + f_3 ku_{\sigma\tau} \middle| f_i \in F\right\}$. Обозначим $A = iu_\sigma$, $B = ku_{\sigma\tau}$. Тогда $AB = -\alpha f\left(\sigma\tau, \sigma\tau\right) ju_\tau$. Таким образом, $C_S\left(D\right)$ есть тело кватернионов с базисными элементами 1, A, B, AB. Этим обстоятельством заканчивается доказательство теоремы [7].

Библиографические ссылки

1. *Albert A. A.* Non-associative algebras II // Ann. Math. 1942. Vol. 43, № 4. P. 708–723.
2. *Jacobson N.* Construction of central simple associative algebras // Ann. Math. 1942. Vol. 45, № 4. P. 658–666.
3. *Бовди А. А.* Скрещенные произведения полугруппы и кольца // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 3. С. 481–499.
4. *Курсов В. В., Янчевский В. И.* Скрещенное произведение простых алгебр и их групп автоморфизмов // Докл. Акад. наук БССР. 1988. Т. 32, № 9. С. 777–780.
5. *Курсов В. В.* Циклические скрещенные произведения простых конечномерных центральных алгебр // Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1990. № 1. С. 8–13.
6. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. М., 1986.
7. *Маклейн С.* Гомология. М., 1966.

References

1. Albert A. A. Non-associative algebras II. *Ann. Math.* 1942. Vol. 43, No. 4. P. 708–723.
2. Jacobson N. Construction of central simple associative algebras. *Ann. Math.* 1942. Vol. 45, No. 4. P. 658–666.
3. Bovdi A. A. [Crossed products of semigroup and ring]. *Sib. mat. zh*. 1963. Vol. 4, No. 3. P. 481–499 (in Russ.).
4. Kursov V. V., Yanchevsky V. I. [Crossed product of simple algebras and their automorphism groups]. *Dokl. Akad. nauk BSSR*. 1988. Vol. 32, No. 9. P. 777–780 (in Russ.).
5. Kursov V. V. [Cyclic crossed products of simple finite-dimensional central algebras]. *Izv. Akad. nauk BSSR. Seriya fiz.-mat. nauk*. 1990. No. 1. P. 8–13 (in Russ.).
6. Pierce R. [Associative algebras]. Moscow, 1986 (in Russ.).
7. Mac Lane S. [Homology]. Moscow, 1966 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 19.01.2017.
Received by editorial board 19.01.2017.