ББК У9(2Рос)23

И.А. Карачун

ХЕДЖИРОВАНИЕ РИСКА ИНВЕСТИЦИЙ

Белорусский государственный университет

В настоящее время в корпоративных финансах большой популярностью пользуются модели оптимизации портфеля, предполагающие прямое ограничение уровня риска, такие как VaR, CaR и др. Но в современной портфельной теории существует еще одна методика исключения риска – это хеджирование. Она заключается в покупке основных активов совместно с их производными инструментами. Например, инвестор может купить акцию и, одновременно, пут-опцион на её продажу и, таким образом, застраховаться от чрезмерного падения цен. Рассмотрим эту методику.

Будем считать, что для составления портфеля имеется один безрисковый актив $S^0(t)$ с постоянной процентной ставкой r (это может быть облигация, казначейский вексель или банковский вклад) и n рисковых активов $S^i(t),\ i=1,\dots,n,$ с ожидаемой доходностью μ_i (акций). Задача оптимизации портфеля заключается в нахождении такой пары (π, c), чтобы ожидаемая полезность для инвестора в момент времени T была наибольшей, то есть максимизировать

$$J(x,\pi,c) = E[\int_0^T U_1(t,c(t))dt + U_2(X(T))],$$

$$V(T,x) = \sup_{(\pi,c)} J(x,\pi,c),$$

где U_1, U_2 – функции полезности, $c(t)$ – функция потребления, x – стартовый капитал, а стоимость портфеля $X(t)$ описывается уравнением

$$dX(t) = X(t)((1-\pi'\underline{1})r + \pi'\mu) - c(t) \ dt + \pi'\sigma X(t)dW(t), \ \ X(0) = x.$$

Здесь $\pi = \pi^1(t),\dots,\pi^n(t) \ '$ – стратегия инвестора (доля каждого актива в портфеле), $\sigma = \sigma_{ij} {}_{i,j=1}^{n}$ – волатильность, $W(t)$ – n-мерное стандартное броуновское движение, $\underline{1} = (1,\dots,1)'$ – n-мерный единичный вектор.

Пусть функция полезности логарифмическая, $U_1(t,x) = U_2(x) = \ln x$, названная критерием Келли. Стоимость опциона в момент времени t задается непрерывно дифференцируемой функцией $f(t, S^1,\dots,S^n)$ и дублируется стоимостью портфеля, содержащего облигацию и n базовых акций. Дублирующая стратегия $\phi = \phi^1(t),\dots,\phi^n(t) \ '$ имеет вид

$$\phi^i(t) = f_{S^i}\,, \quad \phi^0(t) = \frac{f - \sum_{i=1}^{n} f_{S^i} S^i}{S^0},$$

где $\phi^i(t)$ – число единиц соответствующего базового актива, а функция f – решение дифференциального уравнения ($\{\sigma'_{ij}\}_{i,j=1}^{n} = \sigma\sigma'$)

$$f_t + \sum_{i,j=1}^{n} \sigma'_{ij} f_{S^i S^j} S^i S^j + \sum_{i=1}^{n} r f_{S^i} S^i - rf = 0.$$

Для определения динамики стоимости опциона необходимо применить формулу Ито к процессу $f(t, S^1, \ldots, S^n)$. Получим стохастическое дифференциальное уравнение

$$df = (rf + \sum_{i=1}^{n} f_{S^i}\, S^i(\mu - r))dt + \sum_{i=1}^{n} f_{S^i}\, S^i \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW^j(t).$$

Обозначим «дельта-матрицу» портфеля $\Delta(t)$, где $\Delta_{ij}(t) = f_{S^j}^{(i)}$, а следовательно, $f^{(i)} = \sum_{j=0}^{n} \Delta_{ij}(t) S^j$. Тогда при $\Delta_{i0} = \phi^0(t)$

$$X(t) = \varphi^0(t) + \sum_{j=0}^{n} \varphi^i(t)\Delta_{i0}(t)\; S^0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t)\Delta_{ij}(t) \right) S^j,$$

φ^i – сумма, вложенная в соответствующий актив. Решив дифференциальное уравнение для $X(t)$, получим оптимальную стратегию для портфеля, содержащего акции и опционы

$$\varphi^i(t) = (\Delta')^{-1} \varphi^i_{stock}(t), \quad \varphi^0(t) = \frac{X(t) - \sum_{i=1}^{n} \varphi^i_{stock}(t)\, f^{(i)}}{S^0(t)}.$$

Пусть, для простоты, на рынке присутствует только один рисковый актив – акция. В этом случае оптимальное количество единиц этой акции в портфеле $\varphi_{stock}(t) = \dfrac{(\mu - r)\, X(t)}{\sigma^2 S(t)}$. Тогда можно вычислить оптимальный портфель:

$$\pi(t) = \frac{(\mu - r)\, f(t, S(t))}{\sigma^2 f_S(t, S(t)) S(t)}.$$

Для смешанного случая задача решается аналогичным образом. Например, если инвестор хочет составить портфель из акции и опциона, то при вычислении акцию можно рассматривать как колл-опцион с нулевой ценой исполнения (это говорит о том, что задача портфеля из акций – частный случай задачи для опционов). При этом дельта-матрица $\Delta(t)$ будет иметь вид

$$\Delta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_{S^2}(t, S^2(t)) \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что если вместо опциона взять его базовый актив, то портфель будет постоянным, а для всех опционов портфельный процесс зависит от времени и текущей цены базового актива. Кроме того, найденная стратегия π требует дополнительных вычислений, а именно, стоимости и «дельты» опциона.