И.А. Карачун, БГУ, г. Минск

# ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ АКТИВОВ НА БАЗЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ С ДИНАМИЧЕСКИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ РИСКА

Базовые предположения стохастической модели рынка ценных бумаг следующие: торговля активами производится в непрерывном времени; возможные дивиденды, выплачиваемые по акциям, не принимаются в расчет; все активы и их производные свободно продаются и покупаются, разрешена короткая продажа; нет возможностей получения арбитражной прибыли.

Для составления портфеля имеется один безрисковый актив $S^0(t)$ с постоянной процентной ставкой *r* (это может быть облигация, казначейский вексель или банковский вклад) и *n* рисковых активов $S^i(t),\ i=1,\dots,n,$ с ожидаемой доходностью $\mu_i$ (акций). Динамика облигации описывается предсказуемой положительной стохастической последовательностью, то есть при получении всей информации стоимость в момент времени *t* становится известна в момент времени $t-1$. Следовательно, поведение $S^0(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$dS^0(t) = rS^0(t)dt.$$

Обычно, для удобства вычисления берут $S^0(0)=1$, тогда $S^0(t)=e^{rt},\ t\ge 0$.

Курс *i*-й акции также описывается положительной стохастической последовательностью, однако её стоимость в момент времени *t* становится известна только в этот момент. Поэтому динамика акции задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS^i(t) = S^i(t)\left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}dW^j(t)\right),\ \ S^i(0)=p_i,$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)'$ – вектор, составленный из средних доходностей активов, $\sigma = \left\{\sigma_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ – волатильность, $W(t)$ – *n*-мерное стандартное броуновское движение (случайный процесс с независимыми нормально распределенными приращениями).

Пусть $X(t)$ – капитал инвестора в момент времени *t* (стоимость портфеля), $\pi^i(t)$ – доля каждого рискового актива в портфеле. Тогда случайный вектор $\pi = \left(\pi^1(t), \ldots, \pi^n(t)\right)'$ называется портфелем или стратегией инвестора. Условия, наложенные на все процессы, означают, что инвестор не может заранее знать будущий курс акции, таким образом исключается инсайдерская торговля.

Уравнение капитала инвестора:

$$dX(t) = \Big(X(t)((1 - \pi'\underline{1})r + \pi'\mu) - c(t)\Big)dt + \pi'\sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x,$$

где *x* – стартовый капитал инвестора, $\underline{1} = (1, \ldots, 1)' \in \mathbb{R}^n$ – *n*-мерный единичный вектор, $c(t)$ – потребление. Доля средств, вложенная в безрисковый актив, $\pi^0(t) = 1 - \pi'\underline{1}$ .

При решении задачи оптимизации портфеля будем использовать функцию полезности инвестора с постоянным относительным неприятием риска (CRRA) вида

$$U(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \gamma > 0,\ \gamma \neq 1, \\ \ln x, & \gamma = 1, \end{cases}$$

где $1/\gamma$ – межвременная эластичность потребления, измеряющая готовность заменить потребление в некотором периоде потреблением другого периода. Соответственно, чем меньше $\gamma$ (больше $1/\gamma$), тем выше эта готовность замещать потребление с течением времени. Также следует отметить, что $\gamma$ – коэффициент относительного неприятия риска.

Пусть в уравнении капитала потребление представляет собой функцию вида $c(t) = A(t)X(t)$. Такой выбор обусловлен видом оптимального решения классической задачи Мертона для функции полезности данного класса (CRRA). Тогда

$$dX(t) = \left(\pi'(t)(\mu - r\underline{1}) + r - A(t)\right)X(t)dt + \pi'(t)\sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x .$$

Для определения нестрессовой оценки рыночного риска из рассмотрения исключается небольшая доля (обычно 5% или 1%) самых неблагоприятных случаев. Оценкой риска считается убыток, который возникнет в самом неблагоприятном из оставшихся 95% или 99% случаев. Значение нижней границы интервала является мерой риска, VaR (стоимость под риском). Считается, что с вероятностью, равной разности между 100% и принятой долей отброшенных неблагоприятных случаев, убытки портфеля не превысят значения VaR. Он имеет вид

$$VaR(\pi, t) = x \exp\left\{\int_0^t \left(\pi'(u)(\mu - r\underline{1}) + r - A(u) - \frac{\left\|\pi'(u)\sigma\right\|^2}{2} + \frac{\left\|\pi'(u)\sigma\right\| k_p}{2\sqrt{u}}\right) du\right\}.$$

Динамическое ограничение риска предполагает, что процедура оптимизации должна обеспечить выполнение граничных условий не только в конце процесса, но и в любой момент времени до истечения рассматриваемого периода, то есть

$$\mathrm{VaR}(t) = g(t) .$$

Для удобства вычисления можно преобразовать ограничение следующим образом: $\ln\mathrm{VaR}(t) = \ln g(t) \Rightarrow \dfrac{d \ln \mathrm{VaR}(t)}{dt} - \dfrac{g'(t)}{g(t)} = 0$. Тогда формулировка задачи выбора оптимального портфеля и плана потребления с динамическим ограничением VaR следующая:

$$\max E\left[\int_0^T e^{-\delta t} U(A(t)X(t))dt + \lambda \int_0^T \left(\frac{d \ln \mathrm{VaR}(t)}{dt} - \frac{g'(t)}{g(t)}\right)^2 dt + J(\pi(T), T)\right]$$

$$A(t)X(t) \geq 0, \quad X(t) \geq 0, \quad X(0) \geq 0, \quad \frac{d \ln \mathrm{VaR}(t)}{dt} - \frac{g'(t)}{g(t)} = 0,$$

где $\delta$ – мера склонности инвестора к потреблению, $U(\cdot)$ – функция полезности, $T$ – срок закрытия, $\lambda$ – множитель Лагранжа.