Оптимизация инвестиционного портфеля с финансовыми производными

Белорусский государственный экономический университет, Минск.

Карачун И.А.

На последнее десятилетие XX в. пришлись наиболее существенные изменения организованного рынка производных финансовых инструментов (ПФИ) и сложились главные тенденции его дальнейшего развития. В последние годы процесс инфраструктурных преобразований на мировом финансовом рынке, неотъемлемой частью которого является рынок ПФИ, резко ускорился. В 70-80-е гг. фактически был создан новый сектор рынка – финансовые и фондовые деривативы (производные), на которые в настоящее время приходится 99% общего объема торгов. В связи с этим возрастает количество типов производных продуктов, а так же все чаще их оценка становится объектом научных и корпоративных исследований.

Для того чтобы портфель ценных бумаг отвечал целям и требованиям своего владельца, необходима периодическая замена активов, составляющих этот портфель. Действия, предпринимаемые для изменения портфеля, называют «управление портфелем». То есть это применение к совокупности различных видов ценных бумаг определенных методов и технологических возможностей, которые позволяют сохранить первоначально инвестированные средства, достигнуть максимального уровня инвестиционного дохода, обеспечить инвестиционную направленность портфеля.

Нынешнее состояние финансового рынка заставляет быстро и адекватно реагировать на его изменения, поэтому роль управления инвестиционным портфелем резко возрастает и заключается в нахождении той грани между ликвидностью, доходностью и рискованностью, которая позволила бы выбрать оптимальную структуру портфеля. Этой цели служат различные модели выбора оптимального портфеля.

Практически все математические модели, включающие в себя оценку опционов, основаны на модели Блека-Шоулза динамики цен активов [1]. Она базируется на следующих условиях: рассматриваются только европейские опционы; торговля активами производится в непрерывном времени; любое число акций и опционов может продаваться на рынке с совершенной конкуренцией, транзакционные издержки равны нулю и вся полезная информация бесплатно доходит до участников торгов; не имеется никаких безрисковых арбитражных возможностей; возможны «короткие» продажи акций и опционов с использованием выручки в полном объеме, т.е. активы и их финансовые производные свободно продаются и покупаются без ограничений; безрисковая процентная ставка известна и неизменна до срока закрытия торгов; по акциям не выплачивают дивиденды; курс акции изменяется случайным образом, так что норма доходности постоянна во времени и её значение известно участникам торгов. Величины будущих курсов акций следуют логнормальному случайному блужданию.

При этих предположениях удается доказать, что стоимость финансовой производной будет зависеть только от цены актива, времени и параметров, которые считаются известными константами.

Пусть для составления портфеля мы располагаем одним безрисковым активом S_t^0 с постоянной процентной ставкой r (это может быть облигация или банковский вклад) и n рисковыми активами S_t^i, $i=\overline{1,n}$ (акциями).

Динамика облигации описывается предсказуемой положительной стохастической последовательностью. Стоимость облигации в момент времени t становится известна по получении всей информации в момент времени $t-1$. Следовательно, поведение S_t^0 описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt.$$

Обычно, для удобства вычисления берут $S_o^o = 1$, тогда $S_t^o = e^{rt}$, $t \geq 0$. Такой рынок называется нормализованным, а с помощью умножения курса акции на e^{-rt} можно нормализовать любой рынок. Это означает, что мы рассматриваем цену облигации как единицу исчисления цены и вычисляем цены других активов в терминах этой единицы.

Курс i-й акции также описывается положительной стохастической последовательностью, однако ее стоимость в момент времени t становится известна только в этот момент. Поэтому его динамика задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_t^j),\ \ S_0^i = p_i,$$

где μ_i, σ_{ij} – постоянные, W_t – n-мерное стандартное броуновское движение (случайный процесс с независимыми нормально распределенными приращениями). Суть этого уравнения заключается в следующем: чтобы определить, насколько изменится курс акции по прошествии времени t, надо умножить её курс на некий коэффициент, зависящий от времени. В его состав входят два компонента – среднее изменение доходности акции $\mu_i dt$ и отклонение реальной доходности от средней $\sum\nolimits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_t^j$, рассчитанные по историческим данным. Особенностью второго компонента является то, что в его состав входит dW_t – приращение броуновского движения, которое случайным образом принимает значения от 0 до 1.

Теперь рассмотрим инвестора, который инвестирует свои средства в различные ценные бумаги и чьи действия не влияют на реалии рынка. Пусть X_t – капитал инвестора в момент времени t, $x \geq 0$ – стартовый капитал, π_t^i – число единиц i-го актива. Случайный вектор $\pi_t = (\pi_t^1, ..., \pi_t^n)^T, t \in [0, T]$ называется портфелем или стратегией инвестора. Условия, наложенные на эти процессы, означают, что инвестор не может заранее знать будущий курс акции, таким образом исключается инсайдерская торговля (использование конфиденциальной информации для получения прибыли от рыночных сделок, в США – совершение сделок на основе не подлежащей публикации информации, полученной от лица, располагающего ею в силу своего служебного или привилегированного положения, уголовно наказуемо).

Надо отметить, что величины π_t^i могут быть отрицательными. Это означает короткую продажу акции (продажа акции, которой у продавца в наличии нет, осуществленная в ожидании падения цен). Следовательно, сумма денег, вложенная в облигации $X_t - \sum\nolimits_{i=1}^{n} \pi_t^i S_t^i$, тоже может быть отрицательной;

это можно интерпретировать как заем по процентной ставке r.

В таких предположениях капитал инвестора X_t в каждый момент времени описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \pi_t^i S_t^i [\mu_i dt + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_t^j] + [X_t - \sum\nolimits_{i=1}^{n} \pi_t^i S_t^i] r dt.$$

Правая часть уравнения состоит из: прибыли или убытка от инвестиций в акции и прибыли или убытка от инвестиций в облигации.

Теперь можно решить вопрос о том, как инвестор, вложив стартовый капитал $x > 0$, в каждый момент времени выбирает стратегию π_t чтобы получить максимальную ожидаемую полезность инвестиций.

Для логарифмической функции полезности задача управления портфелем активов выглядит следующим образом [2]

$$E[\ln(X_T)] \to \max$$

$$dX_t = \sum_{i=1}^{n} \pi_t^i S_t^i [\mu_i dt + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_t^j] + [X_t - \sum\nolimits_{i=1}^{n} \pi_t^i S_t^i] r dt,$$

$$X_0 = x \geq 0.$$

Для применения этой модели необходимо располагать соответствующими исходными данными: текущий курс акций и его история за предшествующий период (обычно шесть месяцев), ставка процента по безрисковым операциям (чаще всего используют ставку банковского вклада). Среднее значение и дисперсия нормы дохода по акциям рассчитываются на основе исторических данных.

Литература

1. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. – P. 637–654.

2. Karatzas I., Lehoczky J.P., Shreve S. E. Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon // SIAM Journal on Control and Optimization. 1987. Vol. 25. – P. 1157–1186.