УДК 517.2

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Е. А. ГАЙТЮКЕВИЧ [1], ***Н. Н. ТРУШ*** [1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Изучены характеристики случайных процессов, обладающих свойствами фрактальности и самоподобия. В основе исследования лежит рассмотрение численных характеристик процессов, таких как математическое ожидание, дисперсия, ковариация, асимметрия и эксцесс, а также моментов и семиинвариантов высших порядков, которые в дальнейшем могут быть использованы при оценке качества, выборе наилучшего алгоритма моделирования и изучении реальных данных. Исследование проведено для широко используемого на практике случайного процесса фрактального броуновского движения. Отмечено, что данный процесс обладает свойством стационарности приращений, однако в общем случае его приращения зависимы, что значительным образом усложняет алгоритмы, используемые при моделировании процесса.

Ключевые слова: фрактальное броуновское движение; характеристики случайных процессов; зависимость и независимость приращений процессов.

SOME PROPERTIES OF FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

K. A. HAITSIUKEVICH [a], ***M. M. TROUSH*** [a]

[a]*Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*
Corresponding author: troushNN@bsu.by

This article is dedicated to the study of the characteristics of random processes, with properties of self-similarity and fractality. The study is based on the consideration of numerical characteristics of processes such as mean, variance, covariance, skewness and kurtosis, and the moments and cumulants of higher order, which can then be used to assess the quality and selection of the best simulation algorithm and reseach real-world data. The study was conducted for the random process of fractional Brownian motion, which is widely used. The article also noted that this process has the property of stationary increments, but in general, it increments dependent, which significantly complicates the algorithms used in the modeling process of fractional Brownian motion.

Key words: fractional Brownian motion; characteristics of random processes; dependence and independence of process increments.

Образец цитирования:
Гайтюкевич Е. А., Труш Н. Н. Некоторые свойства фрактального броуновского движения // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 23–27.

For citation:
Haitsiukevich K. A., Troush M. M. Some properties of fractional Brownian motion. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 23–27 (in Russ.).

Авторы:
Екатерина Александровна Гайтюкевич – студентка факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Н. Н. Труш.
Николай Николаевич Труш – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Authors:
Katsiaryna Haitsiukevich, student at the faculty of applied mathematics and computer science.
egajtyukevich@mail.ru
Mikalai Troush, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theory of probability and mathematical statistic, faculty of applied mathematics and computer sciences.
troushNN@bsu.by

В последнее время исследование фрактальных случайных процессов становится все более актуальным. Это связано с тем, что они находят широкое применение на практике. Так, например, в работе [1] большое внимание уделяется случайным процессам фрактальности и самоподобия, сформулированы основные теоретические результаты. В свою очередь, случайные процессы, обладающие этими свойствами, положены в основу многих практических моделей, среди которых выделяют фрактальное броуновское движение и фрактальный гауссовский шум. Изучение фрактальных процессов тесно связано со стохастическим исчислением [2]. В [3] содержатся как теоретические основы, так и практические результаты для свойств фрактальности на примере фрактального броуновского движения, с помощью которого осуществляются оценка и прогнозирование уровня воды в реках. В настоящее время этот процесс используют для оценки динамики некоторых финансовых индексов, а также качества передачи и возможных потерь для сетевого трафика [4].

Введем определение процесса фрактального броуновского движения (ФБД) [5].

Определение. Фрактальным броуновским движением $B_H = \{B_H(t) : t \geq 0\}$ с параметром Харста $0 < H < 1$ называют случайный процесс, обладающий следующими свойствами:

1) $B_H(0) \overset{\text{п. н.}}{=} 0$ и $\mathbb{E}\{B_H(t+s) - B_H(s)\} = 0$ для $t, s \geq 0$;

2) $B_H(t)$ имеет стационарные приращения;

3) $B_H(t+s) - B_H(s) = B_H(t) - B_H(0) = B_H(t) \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2 t^{2H})$ имеет гауссовское распределение для $t, s \geq 0$, σ^2 – положительная константа, называемая коэффициентом диффузии.

Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Теорема 1. *Для процесса фрактального броуновского движения ковариация имеет следующий вид:*

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\sigma^2 \left(t_2^{2H} + t_1^{2H} - |t_2 - t_1|^{2H}\right), \; t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ и } 0 < H < 1. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $t_1 < t_2$ и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$. По определению ковариации и процесса фрактального броуновского движения

$$R(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{B_H(t_1) B_H(t_2)\} - \mathbb{E}\{B_H(t_1)\}\mathbb{E}\{B_H(t_2)\} = \mathbb{E}\{B_H(t_1) \cdot B_H(t_2)\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{2}\left(B_H(t_2)^2 + B_H(t_1)^2 - \left(B_H(t_2) - B_H(t_1)\right)^2\right)\right\} = \frac{1}{2}\sigma^2\left(t_2^{2H} + t_1^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}\right).$$

Если $t_1 > t_2$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\sigma^2\left(t_2^{2H} + t_1^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}\right).$$

Объединяя результаты, имеем требуемое.

Следствие 1. *Коэффициент корреляции процесса фрактального броуновского движения имеет вид*

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(t_1 \cdot t_2)^{-H}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_2 - t_1|^{2H}\right), \; t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ и } 0 < H < 1. \quad (2)$$

Доказательство. Используя определение коэффициента корреляции и равенство (1), имеем (2).

Теорема 2. *Приращения случайного процесса фрактального броуновского движения с параметром Харста H, где* $0 < H < 1$*, являются зависимыми, за исключением случая* $H = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть $t_1 < t_2 < t_3$ и $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}_+$. Будем использовать метод от противного.

Применяя определение ковариации и ФБД, получим

$$\operatorname{cov}\left(B_H(t_3) - B_H(t_2),\; B_H(t_2) - B_H(t_1)\right) = \mathbb{E}\left(\left(B_H(t_3) - B_H(t_2)\right)\left(B_H(t_2) - B_H(t_1)\right)\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(B_H(t_3) B_H(t_2)\right) + \mathbb{E}\left(B_H(t_2) B_H(t_1)\right) - \mathbb{E}\left(B_H(t_3) B_H(t_1)\right) - \mathbb{E}\left(B_H(t_2) B_H(t_2)\right).$$

Учитывая (1), имеем

$$\mathrm{cov}\Big(B_H(t_3) - B_H(t_2),\ B_H(t_2) - B_H(t_1)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2\Big(t_3^{2H} + t_2^{2H} - (t_3 - t_2)^{2H} + t_2^{2H} + t_1^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H} - t_3^{2H} - t_1^{2H} + (t_3 - t_1)^{2H} - 2t_2^{2H}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2\Big((t_3 - t_1)^{2H} - (t_3 - t_2)^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}\Big).$$

Отсюда нетрудно видеть, что рассматриваемая ковариация равна нулю только для случая $H = \frac{1}{2}$, т. е. приращения будут независимыми, в то время как для остальных H приращения зависимы. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для процесса фрактального броуновского движения имеют место нижеперечисленные характеристики:*

1) начальные и центральные моменты n-го порядка, $n = 1, 2, \ldots$, *совпадают и имеют вид*

$$m_n(t) = \mathbb{E}\Big[\big(B_H(t) - \mathbb{E}[B_H(t)]\big)^n\Big] = \mathbb{E}\Big[\big(B_H(t)\big)^n\Big] = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ нечетно,} \\ (n-1)!!\sigma^n t^{nH}, \text{ если } n \text{ четно;} \end{cases}$$

2) семиинварианты n-го порядка, $n = 1, 2, \ldots$, *выражаются следующим равенством:*

$$c_n(t) = \begin{cases} \sigma^2 t^{2H}, \text{ если } n = 2, \\ 0, \text{ для остальных } n. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $B_H(0) \overset{\text{п. н.}}{=} 0$ и n нечетно, то

$$\mathbb{E}\Big[\big(B_H(t)\big)^n\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t^H}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma t^H}\right)^2\right)dx = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции.

Для четных n, применив метод математической индукции, можно показать, что

$$\mathbb{E}\Big[\big(B_H(t)\big)^n\Big] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma t^H}\int\limits_{0}^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma t^H}\right)^2\right)dx.$$

При замене переменной интегрирования $s = \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma t^H}$ правая часть последнего равенства будет равна

$$\frac{\left(\sqrt{2\pi}\sigma t^H\right)^n}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} 2s^n \exp\left(-s^2\right)ds = \frac{\left(\sqrt{2\pi}\sigma t^H\right)^n}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} s^{n-1} d\left(\exp\left(-s^2\right)\right).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\mathbb{E}\Big[\big(B_H(t)\big)^n\Big] = (n-1)\left(\sqrt{\sigma^2 t^{2H}}\right)^2 \mathbb{E}\Big[\big(B_H(t)\big)^{n-2}\Big] = (n-1)!!\sigma^n t^{nH},$$

что и требовалось доказать.

Характеристическая функция $B_H(t)$ имеет вид

$$\varphi_{B_H(t)}(x) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} x^2}.$$

А это означает, что семиинварианты выражаются равенствами:

$$c_n(t) = \left.\frac{\partial^n \ln \varphi_{B_H(t)}(x)}{\partial x^n}\right|_{x=0} = \begin{cases} \sigma^2 t^{2H}, \text{ если } n = 2, \\ 0, \text{ для остальных } n. \end{cases}$$

Следствие 2. *Асимметрия для процесса ФБД*

$$\text{skew}\left[B_H(t)\right] = 0.$$

Доказательство. Исходя из теоремы 3, можем записать

$$\text{skew}\left[B_H(t)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\left(B_H(t)\right)^3\right]}{\left(\mathbb{E}\left[\left(B_H(t)\right)^2\right]\right)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Следствие 3. *Эксцесс для процесса ФБД*

$$\text{kur}\left[B_H(t)\right] = 0.$$

Доказательство.

$$\text{kur}\left[B_H(t)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\left(B_H(t)\right)^4\right]}{\left(\mathbb{E}\left[\left(B_H(t)\right)^2\right]\right)^2} - 3 = \frac{3!!\sigma^4 t^{4H}}{\left(\sigma^2 t^{2H}\right)^2} - 3 = 0.$$

Фрактальное броуновское движение является частным случаем фрактального движения Леви. Данные процессы используются для моделирования сетевого трафика. В [6] модель, построенная с использованием в качестве шума фрактального броуновского движения, имеет вид

$$\hat{A}(t) = mt + \sqrt{am}B_H(t),$$

где $m > 0$, $a > 0$ – константы; $B_H(t)$ – процесс фрактального броуновского движения; $\hat{A}(t),\ t \in (0, \infty)$, – непрерывный интегральный процесс поступления трафика в сети.

Однако в приведенной выше модели процесс ФБД может быть заменен фрактальным процессом Леви, тогда полученная модель будет обладать большей гибкостью, в частности когда интенсивность трафика или скорость его передачи имеют большие разбросы. Тем не менее стоит отметить, что усложнение модели приводит к снижению производительности и является более трудозатратным для практического применения.

При прогнозировании доходности фондового рынка также может применяться фрактальное броуновское движение, которое является обобщением броуновского движения и используется для построения моделей флуктуационных процессов. Поскольку фрактальное броуновское движение обладает тем свойством, что его приращения скоррелированны, то модели, построенные на его основании, могут учитывать ситуации, когда серии событий влияют на итоговый результат, что невозможно при моделировании с помощью броуновского движения, которое является марковским процессом. Однако при указанном подходе появляются арбитражные возможности, но условия, приводящие к арбитражу, носят теоретический характер и не могут быть достигнуты на практике, как показано в работе [7]. Поэтому в настоящее время многие биржевые индексы можно оценивать при помощи данного процесса [8].

Библиографические ссылки

1. *Mandelbrot B. B., van Ness J. W.* Fractional Brownian motion, fractional noises and applications // SIAM Rev. 1968. Vol. 10, № 4. P. 422–437.
2. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable non-Gaussian random processes. New York, 1994.
3. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической и финансовой математики. М., 1998.
4. *Lakhel E., McKibben M. A.* Controllability of neutral stochastic integro-differential evolution equations driven by a fractional Brownian motion // Afr. Mat. 2016. № 7. P. 1–14.
5. *Dieker T.* Simulation of fractional Brownian motion / CWI and University of Twente Department of Mathematical Sciences. Amsterdam, 2004. P. 12.
6. *Norros I.* A Storage Model with Self-Similar Input // Queuing Syst. 1994. Vol. 16, issue 3. P. 387–396.
7. *Cheredito P.* Arbitrage in fractional Brownian motion models // Finance Stoch. 2003. Vol. 7, issue 4. P. 533–553.
8. *Ilalan D.* Elliott wave principle and the corresponding fractional Brownian motion in stock markets: Evidence from Nikkei 225 index // Chaos, Solitons & Fractals. 2016. Vol. 92. P. 137–141.

References

1. Mandelbrot B. B., van Ness J. W. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Rev.* 1968. Vol. 10, No. 4. P. 422–437. DOI: 10.1137/1010093.

2. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable non-Gaussian random processes. New York, 1994.

3. Shiryaev A. N. Osnovy stokhasticheskoi i finansovoi matematiki. Moscow, 1998 (in Russ.).

4. Lakhel E., McKibben M. A. Controllability of neutral stochastic integro-differential evolution equations driven by a fractional Brownian motion. *Afr. Mat.* 2016. No. 7. P. 1–14.

5. Dieker T. *Simulation of fractional Brownian motion.* CWI and University of Twente Department of Mathematical Sciences. Amsterdam, 2004. P. 12.

6. Norros I. A Storage Model with Self-Similar Input. *Queuing Syst.* 1994. Vol. 16, issue 3. P. 387–396.

7. Cheredito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance Stoch.* 2003. Vol. 7, issue 4. P. 533–553. DOI: 10.1007/s007800300101.

8. Ilalan D. Elliott wave principle and the corresponding fractional Brownian motion in stock markets: Evidence from Nikkei 225 index. *Chaos, Solitons* & *Fractals.* 2016. Vol. 92. P. 137–141. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.09.018.

Статья поступила в редколлегию 23.09.2016.
Received by editorial board 23.09.2016.