

УДК 514.752.23

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ КВАДРИКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

В. В. ЛЫСЕНКО¹⁾, В. Л. ТИМОХОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Отмечено, что при исследовании локальных свойств пространственной кривой часто используются сопутствующие объекты, имеющие достаточно высокие аппроксимационные свойства. Важнейшие из них – соприкасающаяся плоскость и соприкасающаяся сфера. Известно, что соприкасающаяся плоскость имеет с кривой касание порядка не ниже второго, а соприкасающаяся сфера – не ниже третьего. Решается задача нахождения поверхности второго порядка (соприкасающейся квадрики), имеющей с кривой касание порядка не ниже шестого. Доказано, что соприкасающаяся квадрика существует, и описана методика ее построения. Указано, что возможно получение соприкасающейся квадрики любого из основных типов поверхностей второго порядка.

Ключевые слова: пространственная кривая; соприкасающаяся сфера; соприкасающаяся квадрика.

OSCULATING QUADRIC OF THE SPATIAL CURVE

V. V. LYSENKO^a, V. L. TIMOKHOVICH^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: valery.sholomitskaya@gmail.com

In the investigation of local properties of a space curve associated objects which have good approximation characteristics are often used. The main ones – the osculating plane and the osculating sphere. As known, the osculating plane has tangency of at least 2nd degree with the curve, while the osculating sphere – at least 3rd degree. In the paper a problem of

Образец цитирования:

Лысенко В. В., Тимохович В. Л. Соприкасающаяся квадрика пространственной кривой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 11–15.

For citation:

Lysenko V. V., Timokhovich V. L. Osculating quadric of the spatial curve. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 11–15 (in Russ.).

Авторы:

Валерия Владимировна Лысенко – студентка механико-математического факультета. Научный руководитель – В. Л. Тимохович.

Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методов преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:

Valery Lysenko, student at the faculty of mechanics and mathematics.

valery.sholomitskaya@gmail.com

Vladimir Timokhovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and methods of teaching mathematics, faculty of mechanics and mathematics.

finding of 2nd degree surface (the osculating quadric) which has tangency of at least 6th degree is considered. It is proved the osculating quadric exists and a method of its construction is described. Also existence of osculating quadric of any basic type of 2nd degree surface is pointed out.

Key words: space curve; osculating sphere; osculating quadric.

Рассмотрим гладкую кривую γ в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , заданную натуральной параметризацией $\bar{\rho}(s)$, $s \in (-\epsilon; \epsilon)$. Будем считать, что $\bar{\rho}(s_1) \neq \bar{\rho}(s_2)$ при $s_1 \neq s_2$, а в точке $\rho_0 = \rho(0)$ кривизна κ и кручение τ отличны от нуля и репер Френе $\{\rho; \bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$ совпадает с фиксированным репером $\{0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ (здесь и далее $\rho(s)$ – точка с радиус-вектором $\bar{\rho}(s)$).

Пусть $\mathcal{L}$ – некоторая фигура в E^3 (кривая или поверхность), содержащая точку ρ_0 . Скажем, что $\mathcal{L}$ имеет с кривой γ в точке ρ_0 соприкосновение порядка не ниже n -го, если $\frac{\delta(s)}{s^{n+1}}$ ограничено при $s \rightarrow 0$, где $\delta(s)$ – расстояние от точки $\rho(s)$ до $\mathcal{L}$.

В любом, достаточно подробном курсе классической дифференциальной геометрии [1; 2] доказывается, что порядок соприкосновения касательной прямой с γ в точке ρ_0 не ниже первого, соприкасающихся плоскости и окружности – не ниже второго, соприкасающейся сферы – не ниже третьего порядка. В настоящей работе доказывается существование поверхности второго порядка (квадрики), имеющей с γ в точке ρ_0 соприкосновение не ниже шестого порядка. Начнем с предварительных рассуждений.

Пусть $\mathcal{L}$ – квадрика, содержащая точку ρ_0 , заданная (в репере $\{0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$) уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, где

$$\Phi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz \text{ и } G^2 + H^2 + I^2 \neq 0.$$

Фиксируем вектор $\bar{n} = (G, H, I)$. Отметим, что $\bar{n}$ ортогонален $\mathcal{L}$ в точке ρ_0 , поскольку $\bar{n} = \frac{1}{2} \nabla \Phi(0, 0, 0)$, где $\nabla \Phi(0, 0, 0)$ – вектор-градиент для Φ в точке ρ_0 . Через точку $\rho(s)$ на кривой γ проведем прямую $\Delta(s)$ с направляющим вектором $\bar{n}$. При достаточно малом s $\Delta(s)$ пересекает $\mathcal{L}$ в некоторой точке $p(s)$ и

$$\bar{p}(s) = \bar{\rho}(s) + \lambda(s)\bar{n},$$

где $\lambda(s)$ – некоторый переменный коэффициент и $\lambda(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$. Очевидно, что $\delta(s)$ (расстояние от $\rho(s)$ до $\mathcal{L}$) и $\lambda(s)$ – бесконечно малые (при $s \rightarrow 0$) одного и того же порядка.

Пусть $\rho(s) = (u(s), v(s), w(s))$. Тогда $p(s) = (u(s) + \lambda(s)G, v(s) + \lambda(s)H, w(s) + \lambda(s)I)$. Подставляя координаты $p(s)$ в уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ и преобразуя полученное тождество, приходим к следующему соотношению, имеющему вид квадратного уравнения относительно λ :

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (AG^2 + BH^2 + CI^2 + 2DGH + 2EGI + 2FHI) + \\ & + 2\lambda [(AG + DH + EI)u + (BH + DG + FI)v + (CI + EG + FH)w + G^2 + H^2 + I^2] + \\ & + Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw + 2Gu + 2Hv + 2Iw = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(здесь и далее при возможности опускаем аргумент s).

Положим

$$\Phi(x, y, z) = \Psi(x, y, z) + L(x, y, z),$$

где $\Psi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$ – квадратичная часть; $L(x, y, z) = 2Gx + 2Hy + 2Iz$ – линейная часть; $l(x, y, z) = (AG + DH + EI)x + (BH + DG + FI)y + (CI + EG + FH)z$. Тогда (1) получает более простой вид:

$$\Psi(\bar{n})\lambda^2 + 2[\bar{n}^2 + l(u, v, w)]\lambda + \Phi(u, v, w) = 0. \quad (2)$$

При $s = 0$ (при этом $u = v = w = 0$) уравнение (2) принимает вид

$$\Psi(\bar{n})\lambda^2 + 2\bar{n}^2\lambda = 0. \quad (3)$$

Если $\Psi(\bar{n}) = 0$, то (2) имеет единственное решение

$$\lambda = -\frac{\Phi(u, v, w)}{2[\bar{n}^2 + l(u, v, w)]}$$

(прямая $\Delta(s)$ пересекает $\mathcal{L}$ в одной точке) и порядок малости λ тот же, что и у $\Phi(u, v, w)$.

Если же $\Psi(\bar{n}) \neq 0$, то корни (3) есть $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -\frac{2\bar{n}^2}{\Psi(\bar{n})} \neq 0$. Но тогда, поскольку корни $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$ квадратного уравнения (2) обращаются при $s = 0$ в корни λ_1 и λ_2 уравнения (3), порядок малости $\lambda_1(s)$ (очевидно, именно его следует выбрать) тот же, что и у произведения $\lambda_1(s)\lambda_2(s) = \frac{\Phi(u, v, w)}{\Psi(\bar{n})}$,

которое, в свою очередь, того же порядка малости, что и $\Phi(u, v, w)$.

Итак, в обоих случаях приходим к задаче отыскания коэффициентов $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, при которых функция $\Phi(u, v, w)$ является бесконечно малой (при $s \rightarrow 0$) наивысшего возможного порядка.

Разложим $\bar{\rho}(s)$ по формуле Тейлора. Учитывая, что $\bar{\rho}(0) = \bar{0}$,

$$\bar{\rho}(s) = \sum_{n=1}^m \frac{s^n}{n!} \bar{\rho}^{(n)}(0) + s^{m+1} \bar{g}(s) \quad (4)$$

(m достаточно велико, $\bar{g}(s) = (g_1(s), g_2(s), g_3(s))$, и функция $|\bar{g}(s)|$ ограничена при $s \rightarrow 0$).

Пусть

$$\bar{\rho}^{(n)} = a_n \bar{\tau} + b_n \bar{v} + c_n \bar{\beta} \quad (5)$$

(a_n, b_n, c_n — функции параметра s). Применяя формулы Френе ($\dot{\bar{\tau}} = \kappa \bar{v}$, $\dot{\bar{v}} = -\kappa \bar{\tau} + \varkappa \bar{\beta}$, $\dot{\bar{\beta}} = -\varkappa \bar{v}$), находим

$$\begin{cases} \dot{\bar{\rho}} = \bar{\tau}, \\ \ddot{\bar{\rho}} = \kappa \bar{v}, \\ \dddot{\bar{\rho}} = -\kappa^2 \bar{\tau} + \dot{\kappa} \bar{v} + \kappa \varkappa \bar{\beta}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ b_1 = 0, \\ c_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 0, \\ b_2 = \kappa, \\ c_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = -\kappa^2, \\ b_3 = \dot{\kappa}, \\ c_3 = \kappa \varkappa. \end{cases} \quad (6)$$

Далее, $\bar{\rho}^{(n+1)} = (a_n \bar{\tau} + b_n \bar{v} + c_n \bar{\beta})' = (\dot{a}_n - \kappa b_n) \bar{\tau} + (\dot{b}_n - \kappa a_n - \varkappa c_n) \bar{v} + (\dot{c}_n - \varkappa b_n) \bar{\beta}$ и таким образом получаем рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dot{a}_n - \kappa b_n, \\ b_{n+1} = \dot{b}_n + \kappa a_n - \varkappa c_n, \\ c_{n+1} = \dot{c}_n + \varkappa b_n. \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая (5), (6) и совпадение при $s = 0$ репера Френе с репером $\{0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, перепишем (4) по координатно:

$$\begin{cases} u(s) = s + \sum_{n=3}^m \frac{a_n}{n!} s^n + g_1(s) s^{m+1}, \\ v(s) = \frac{\kappa}{2} s^2 + \sum_{n=3}^m \frac{b_n}{n!} s^n + g_2(s) s^{m+1}, \\ w(s) = \sum_{n=3}^m \frac{c_n}{n!} s^n + g_3(s) s^{m+1} \end{cases} \quad (8)$$

(здесь и далее a_n, b_n, c_n при $s = 0$). Подставим выражения (8) в $\Phi(u, v, w)$. При этом положим $G = 0$ (иначе $\Phi(u, v, w)$ – бесконечно малая того же порядка, что и s). Преобразуя полученное, приходим к представлению вида

$$\begin{aligned}\Phi(u, v, w) = & (m_{11}A + m_{12}D + m_{13}E + m_{14}F + m_{15}C + m_{16}B + m_{17}I + m_{18}H)s^2 + \\ & + (m_{21}A + m_{22}D + m_{23}E + m_{24}F + m_{25}C + m_{26}B + m_{27}I + m_{28}H)s^3 + \dots \\ & \dots + (m_{51}A + m_{52}D + m_{53}E + m_{54}F + m_{55}C + m_{56}B + m_{57}I + m_{58}H)s^6 + \dots,\end{aligned}$$

где величины m_{ij} выражаются через a_n, b_n, c_n (считаем, в (4) $m \geq 6$). Приравнявая к нулю коэффициенты при степенях s со второй по шестую, получаем систему линейных уравнений, которая дает возможность выразить A, D, E, F, C через B, H, I и имеет вид (векторно-матричный)

$$M \begin{pmatrix} A \\ D \\ E \\ F \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_{18}H \\ -m_{27}I - m_{28}H \\ -m_{36}B - m_{37}I - m_{38}H \\ -m_{46}B - m_{47}I - m_{48}H \\ -m_{56}B - m_{57}I - m_{58}H \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{pmatrix} \text{ и } \det M \neq 0.$$

Действительно, (6) и (7) позволяют вычислить все величины m_{ij} , в частности

$$\begin{aligned}m_{11} = 1, m_{12} = \dots = m_{17} = 0; m_{22} = b_2 = \kappa, m_{23} = \dots = m_{26} = 0; \\ m_{33} = \frac{c_3}{3} = \frac{\kappa\chi}{3}, m_{34} = m_{35} = 0; m_{44} = \frac{b_2c_3}{6} = \frac{\kappa^2\chi}{6}, m_{45} = 0; m_{55} = \frac{c_3^2}{36} = \frac{(\kappa\chi)^2}{36},\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\det M = m_{11}m_{22}m_{33}m_{44}m_{55} = \frac{\kappa^6\chi^4}{648} \neq 0.$$

Отметим, что, поскольку $m_{18} = b_2 = k$ и $m_{27} = \frac{c_3}{3} = \frac{\kappa\chi}{3}$, правый столбец в (9) ненулевой и, следовательно, в силу невырожденности матрицы M левый столбец тоже ненулевой, т. е. $\Phi(x, y, z)$ имеет нетривиальные (ненулевые) квадратичную $\Psi(x, y, z)$ и линейную $L(x, y, z)$ части.

Все вышерассмотренное позволяет сформулировать следующее.

Теорема. Существует содержащая точку p_0 квадрика, имеющая с кривой γ в точке p_0 соприкосновение порядка не ниже шестого.

Замечание. Описанная здесь квадрика достаточно вариативна. Уже для винтовой линии с $\kappa = \chi = 1$, осуществляя на компьютере различные наборы констант B, I, H , можно получить эллипсоид, эллиптический и гиперболический параболоиды, однополостный и двуполостный гиперболоиды, а также конус. Отметим также, что если попытаться повысить порядок соприкосновения, формируя систему, аналогичную (9), но состоящую уже из шести уравнений (полагая в (4) $m \geq 7$), то условие $\det M \neq 0$ определит некоторую взаимосвязь между значениями кривизны κ , кручения χ и их производных при $s = 0$ (т. е. κ и χ перестанут быть независимыми).

Библиографические ссылки

1. *Выгодский М. Я.* Дифференциальная геометрия. М. ; Л., 1949.
2. *Фиников С. П.* Курс дифференциальной геометрии. М., 1952.

References

1. Vygodsky M. Y. *Differentsial'naya geometriya* [Differential geometry]. Moscow ; Leningrad, 1949 (in Russ.).
2. Finikov S. P. *Kurs differentsial'noi geometrii* [Course of differential geometry]. Moscow, 1952 (in Russ.).

*Статья поступила в редколлегию 05.11.2015.
Received by editorial board 05.11.2015.*