# О КОНЕЧНОЙ ХАРАКТЕРИЗУЕМОСТИ ОДНОГО КЛАССА РЕБЕРНЫХ ГРАФОВ ГИПЕРГРАФОВ ОГРАНИЧЕННОГО РАНГА В КЛАССЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРАФОВ

**К. Н. Щемелева**

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Множества *вершин* и *ребер* (гипер)графа $H$ обозначаются $VH$ и $EH$ соответственно. Если $N(v) = N_G(v)$ – *окружение* вершины $v$ в графе $G$, то $\deg(v) = \deg_G(v) = |N(v)|$ – *степень* вершины $v$; если $X \subseteq VG$, то $G(X)$ – подграф, порожденный множеством $X$.

*Кликой* называется множество попарно смежных вершин графа; *максимальная* клика максимальна относительно включения. Конечное семейство $Q = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ клик графа $G$ называется *покрытием* этого графа, если каждая вершина и каждое ребро графа $G$ входит хотя бы в одну из клик $C_i$. При этом клики $C_i$ называются *кластерами* покрытия $Q$. Покрытие $Q$ графа называется *m-ограниченным*, если любые два кластера из $Q$ имеют не более $m$ общих вершин, и *$r$-покрытием*, если любая вершина графа входит не более чем в $r$ кластеров из $Q$.

*Реберный граф* $L(H)$ гиперграфа $H$ определяется условиями: $VL(H) = EH$, и две вершины смежны в $L(H)$, если и только если соответствующие ребра гиперграфа $H$ пересекаются.

*Рангом* гиперграфа $H$ называется число $\operatorname{rank}(H) = \max\limits_{E \in EH} |E|$; *кратность пары вершин u, v* гиперграфа $H$ – это число $\mathrm{m}(u,v) = \left|\left\{E \in EH \ : \ u, v \in E\right\}\right|$; $\mathrm{m}(H) = \max\limits_{u,v \in VH} \mathrm{m}(u,v)$ – *кратность гиперграфа*.

Пусть $r$, $m$ – произвольные целые числа, $r \geq 2$, $m \geq 1$. Введем обозначение $L_r^m = \left\{L(H) \ : \ \operatorname{rank}(H) \leq r, \mathrm{m}(H) \leq m\right\}$.

Класс $L_r^m$ – наследственный, и, поэтому, может быть охарактеризован посредством списка (конечного или бесконечного) запрещенных порожденных подграфов. Известно, что для любого $m$ класс $L_2^m$ характеризуется конечным списком запрещенных порожденных подграфов. Следовательно, существует полиномиальный алгоритм распознавания графов из этого класса. Поэтому далее считаем, что $r \geq 3$.

Известно, что задача распознавания $G \in L_r^1$ является $NP$-полной [1]. Поэтому для класса $L_r^1$ не существует конечной характеризации в терминах запрещенных порожденных подграфов. Сложность задачи распознавания $G \in L_r^m$, $m \geq 2$, пока неизвестна. Однако в [2] доказано, что класс $L_3^m$ для любого $m \geq 2$ не характеризуется конечным списком запрещенных порожденных подграфов.

Граф $G$ называется *расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин $VG = C \bigcup S$ на клику $C$ и независимое множество $S$ (*полярное разбиение*). Далее считаем, что в полярном разбиении $VG = C \bigcup S$ расщепляемого графа $G$ клика $C$ является максимальной.

В [3] доказано, что для каждого фиксированного $r$ графы из $L_r^1$ характеризуются конечным списком запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. Нами доказывается аналогичный факт для класса $L_r^m$.

Из теоремы Бержа [4], описывающей для заданного графа $G$ все гиперграфы $H$ такие, что $L(H) = G$, вытекает следующее утверждение:

**Теорема 1.** *Граф G принадлежит классу* $L_r^m$, *если и только если для него существует m-ограниченное r-покрытие.*

Обозначим $f(r,m) = m(r^2 - r + 1) + 1$. Клика $C$ графа $G$ называется $(r,m)$*-большой*, если $|C| \geq f(r,m)$.

**Лемма 1.** *Пусть* $G \in L_r^m$, *C – максимальная* $(r,m)$*-большая клика графа G. Тогда C является кластером каждого m-ограниченного r-покрытия графа G.*

*Доказательство*. Пусть $A_1, A_2, ..., A_k$ – кластеры $m$-ограниченного $r$-покрытия $A$ графа $G$, пересекающиеся с кликой $C$, причем $C$ не является кластером $A$. Тогда $B = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$, где $B_i = A_i \bigcap C$, есть $m$-ограниченное $r$-покрытие графа $G(C)$, и (согласно максимальности $C$) $B_i \neq C$ для любого $i = \overline{1,k}$. Пусть, не ограничивая общности, вершина $v$ из $C$ входит в первые $t$ кластеров $B_1, B_2, ..., B_t$ покрытия $B$, $t \leq r$. Несложно показать, что $|B_i| \leq mr$ и $|B_i \setminus B_j| \leq m(r-1)$ для любых $i, j = \overline{1,t}$. Отсюда вытекает следующая цепочка неравенств:

$$|B_1 \bigcup B_2| = |B_1| + |B_2 \setminus B_1| \leq mr + m(r-1),$$

$$|B_1 \bigcup B_2 \bigcup B_3| = |B_1 \bigcup B_2| + |B_3 \setminus (B_1 \bigcup B_2)| \leq$$
$$\leq (mr + m(r-1)) + m(r-1) = mr + 2 \cdot m(r-1),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$|B_1 \cup \ldots \cup B_t| = |B_1 \cup \ldots \cup B_{t-1}| + |B_t \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{t-1})| \le$$
$$\le (mr + (t-2)m(r-1)) + m(r-1) = mr + (t-1)\cdot m(r-1).$$

Учитывая, что $C = B_1 \cup \ldots \cup B_t$ и $t \le r$, имеем: $|C| \le mr + (r-1)m(r-1) = m(r^2 - r + 1) < f(r,m)$.
Полученное противоречие и доказывает лемму.

*Замечание*. Легко показать, что значение $f(r,m)$ не улучшаемо уже при $r = 3$ и $m = 1$.

**Лемма 2.** *Существует конечный список* $\mathrm{F}_1$ *запрещенных порожденных подграфов такой, что расщепляемый граф G с плотностью* $\varphi(G) \ge (rm-1)r + 2$, $m \ge 2$, *принадлежит классу* $L_r^m$, *если и только если G не содержит порожденных подграфов из* $\mathrm{F}_1$.

*Доказательство*. Пусть $R_k$ – граф, полученный из полного графа $H = K_{f(r,m)}$ добавлением новой вершины, смежной ровно с *k* вершинами из *H*. Положим $\mathrm{F}_1 = \{R_k \ : \ rm + 1 \le k \le f(r,m) - 1\} \cup \{K_{1,r+1}\}$, где $K_{1,r+1}$ – звезда с $r+1$ концевыми вершинами.

С помощью теоремы 1 и леммы 1 непосредственно проверяется, что никакой граф из $\mathrm{F}_1$ не принадлежит $L_r^m$. Поэтому необходимость утверждения вытекает из наследственности класса $L_r^m$.

Докажем достаточность. Пусть $VG = C \cup S$ – полярное разбиение графа *G*, $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$. Поскольку *C* – максимальная клика и $|C| = \varphi(G) \ge (rm-1)r + 2 = mr^2 - (r-1) + 1 \ge mr^2 - m(r-1) + 1 = f(r,m)$, то, в силу запрещенности графов $R_k$, $rm + 1 \le k \le f(r,m) - 1$, имеем $\deg(v) \le rm$ для каждой вершины *v* из *S*. Согласно запрещенности $K_{1,r+1}$, имеем $|N(u) \cap S| \le r$ для каждой вершины *u* из *C*. Покажем, что на самом деле для каждой вершины *u* из *C* верно $|N(u) \cap S| \le r - 1$. Пусть это не так. Допустим, не ограничивая общности, что вершина *u* из *C* смежна с вершинами $v_1, \ldots, v_r$ из *S*, $r \le p$. Так как $\deg(v_i) \le rm$ и $u \in \bigcap_{i=1}^{r} N(v_i)$, то $\left|\bigcup_{i=1}^{r} N(v_i)\right| \le \sum_{i=1}^{r} (\deg(v_i) - 1) + 1 \le (rm-1)r + 1 < \varphi(G)$. Следовательно, существует вершина $u'$ из *C*, не смежная ни с одной из $v_1, ..., v_r$. Но тогда $G(u, u', v_1, \ldots, v_r) \cong K_{1,r+1}$, что невозможно.

Построим теперь $m$-ограниченное $r$-покрытие графа $G$. Поскольку $\deg(v_i) \le rm$ для любого $i = 1,\ldots,p$, то существует разбиение $N(v_i) = C_{i1} \cup \ldots \cup C_{is_i}$, где $C_{ij} \cap C_{il} = \varnothing$, $j,l \in \{1,\ldots,s_i\}$, $j \ne l$, $|C_{ij}| \le m$, $s_i \le r$. Очевидно, что семейство клик $\left(C_{ij} \cup \{v_i\} \,:\, i = \overline{1,p},\, j = \overline{1,s_i}\right)$ вместе с кликой $C$ есть $m$-ограниченное $r$-покрытие графа $G$. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Существует конечный список* $\mathrm{F}_2$ *запрещенных порожденных подграфов такой, что расщепляемый граф* $G$ *с плотностью* $\varphi(G) \le (mr-1)r+1$ *принадлежит классу* $L_r^m$, *если и только если* $G$ *не содержит порожденных подграфов из* $\mathrm{F}_2$.

*Доказательство.* Пусть $VG = C \cup S$ – полярное разбиение графа $G$. Занесем в список $\mathrm{F}_2$ граф $K_{1,r+1}$. В силу запрещенности $K_{1,r+1}$, имеем $|N(u) \cap S| \le r$ для любой вершины $u$ из $C$. Следовательно, $|G| = |C| + |S| \le |C| + \sum_{u \in C} |N(u) \cap S| \le ((rm-1)r+1)(r+1)$, т. е. порядок графа $G$ ограничен константой, зависящей от $r$ и $m$. Занесем в список $\mathrm{F}_2$ все не принадлежащие классу $L_r^m$ расщепляемые графы $H$ такие, что $|H| \le ((rm-1)r+1)(r+1)$. Очевидно, что построенный конечный список $\mathrm{F}_2$ является искомым. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение:

**Теорема 2.** *Существует конечный список* $\mathrm{F}$ *запрещенных порожденных подграфов такой, что расщепляемый граф* $G$ *принадлежит классу* $L_r^m$, *если и только если* $G$ *не содержит порожденных подграфов из* $\mathrm{F}$.

*Доказательство*. В качестве искомого списка $\mathrm{F}$ можно взять объединение списков $\mathrm{F}_1$ и $\mathrm{F}_2$ из лемм 2 и 3. Теорема доказана.

### Литература


1. *Hlineny P.*, *Kratochvil J.* Computational complexity of the Krausz dimension of graphs // Lecture Notes in Computer Sciences. № 1335. C. 214–228.
2. *Левин А. Г.*, *Тышкевич Р. И.* Реберные гиперграфы // Дискретная математика. 1993. Т. 5. № 1. С. 112–129.
3. *Метельский Ю. М.* Расщепляемые реберные графы от гиперграфов ограниченного ранга // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 3. С. 117–122.
4. *Berge C.* Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. Amsterdam. 1989.