

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

С. П. Ходос

Гиперболические сингулярные дифференциально-операторные уравнений второго порядка с постоянными областями определения исследовались в [1]. Гиперболические несингулярные дифференциально-операторные уравнений второго порядка с зависящими от времени областями определения изучены в [2]. В настоящей работе выводится энергетическое неравенство сильных решений для гиперболического сингулярного дифференциально-операторного уравнений второго порядка с зависящими от времени областями определения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассматривается задача Коши:

$$Lu \equiv \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{B(t)}{t} \frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in]0, T[, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad du/dt|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

где $f(t)$ и $u(t)$ — функции переменной t со значениями в H и $A(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, $t \in [0, T]$.

На операторы $A(t)$ налагаются следующие условия.

A1. При каждом $t \in [0, T]$ операторы $A(t)$ самосопряжены в H и $(A(t)u, u) \geq c_1 |u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad c_1 > 0$.

A2. Обратные операторы $A^{-1}(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$ к операторам $A(t)$ сильно непрерывны по $t \in [0, T]$ в H и при почти всех $t \in]0, T[$ имеют в H сильную производную $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$, которая при почти всех $t \in]0, T[$ удовлетворяет неравенству [2]

$$-((dA^{-1}(t)/dt)g, g) \leq c_2 (A^{-1}(t)g, g) \quad \forall g \in H, \quad c_2 \geq 0. \quad (3)$$

B1. При каждом $t \in [0, T]$ для замкнутых операторов $B(t)$ в H с зависящими от t областями определения $D(B(t))$ выполняется оценка

$$-\operatorname{Re}(B(t)u, u) \leq c_3 t |u|^2 \quad \forall u \in D(B(t)), \quad c_3 \geq 0. \quad (4)$$

Выведем энергетическое неравенство для сильных решений поставленной задачи Коши.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Сначала введем нужные пространства. Обозначим $\mathcal{H} = L_2([0, T[, H)$. За пространство сильных решений задачи Коши (1), (2) возьмем гильбертово пространство E , получающееся замыканием множества

$$D(L) = \{u \in \mathcal{H} : u(t) \in D(A(t)), du(t)/dt \in D(B(t)), u(t) \in D(B^*(t)), \\ \forall t \in [0, T]; \frac{du(t)}{dt}, \frac{d^2u(t)}{dt^2} \in \mathcal{H}; \frac{B(t)}{t} \frac{du}{dt}, \frac{B^*(t)}{t} u, A(t)u \in \mathcal{H}; u(0) = \frac{du(0)}{dt} = 0\},$$

по эрмитовой норме $\|u\|_E = \left[\int_0^T \left(|du/dt|^2 + |A^{1/2}(t)u|^2 \right) dt \right]^{1/2}$, где $B^*(t)$ –

сопряженные операторы к операторам $B(t)$, $D(B^*(t))$ – их области определения и $A^{1/2}(t)$ – квадратный корень операторов $A(t)$. За пространство правых частей f уравнения (1) возьмем банахово пространство F , которое получается замыканием множества $\mathcal{H}$ по норме

$$\|f\|_F = \sup_v \left\{ \left| \int_0^T (T-t)(f, v) dt \right| / \|v\|_0 \right\}, \quad v \in \mathcal{H}, \quad \|v\|_0 = \left(\int_0^T |v|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пространство F является множеством всех антилинейных непрерывных функционалов на гильбертовом пространстве E_1 с эрмитовой нор-

$$\|w\|_{E_1} = \left[\int_0^T (T-t)^{-2} |w|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Задача Коши (1), (2) эквивалентна линейному неограниченному оператору $L : E \supset D(L) \rightarrow F$ с плотной областью определения $D(L)$, который допускает сильное замыкание $\bar{L} : E \supset D(\bar{L}) \rightarrow F$.

Лемма. Если операторы $A(t)$ удовлетворяют условию A1 и множество $D(L)$ плотно в $\mathcal{H}$, то оператор L замыкаем.

Доказательство. Согласно критерию замыкаемости линейных операторов требуется показать, что если $u_n \in D(L)$, $\|u_n\|_E \rightarrow 0$ и $\|Lu_n - f\|_F \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $f=0$. Значение функционала f на E_1 для $\forall v \in D(L)$ после однократного интегрирования по t по частям равно

$$\begin{aligned}\langle f, v \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (T-t)(Lu_n, v) dt = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left(\frac{du_n}{dt}, \frac{d}{dt}(T-t)v \right) dt + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (T-t) \left(\frac{du_n}{dt}, \frac{B^*(t)}{t} v \right) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (T-t)(u_n, A(t)v) dt = 0.\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $f = 0$, так как из $\overline{D(L)} = \mathcal{H}$ следует плотность множества функций $\{w = (T-t)v : v \in D(L)\}$ в E_1 .

По определению сильного замыкания $\bar{L}$ функция $u \in D(\bar{L})$ – область определения оператора $\bar{L}$, если существует такая $u_n \in D(L)$ и $f \in F$, что $\|u_n - u\|_E \rightarrow 0$ и $\|Lu_n - f\|_F \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. При этом полагают $\bar{L}u = \lim_{n \rightarrow \infty} Lu_n = f$.

Определение. Решения $u \in D(\bar{L})$ операторного уравнения $\bar{L}u = f$, $f \in F$, называются *сильными решениями* задачи Коши (1), (2).

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Выведем энергетическое неравенство (5) для решений задачи (1), (2).

Теорема. Если выполняются условия A1, A2, B1 и множество $D(L)$ плотно в $\mathcal{H}$, то имеет место неравенство

$$\|u\|_E \leq c_5 \|\bar{L}u\|_F \quad \forall u \in D(\bar{L}), \quad c_5 = 2 \exp(\max\{c_2, 2c_3\}T). \quad (5)$$

Доказательство. Воспользуемся сглаживающими операторами $A_\varepsilon^{-1} = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon \geq 0$, из [2] со следующими свойствами.

- а) Норма $\|A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$, $\forall \varepsilon > 0, \forall t \in [0, T]$.
- б) Равномерно по t в H операторы $A_\varepsilon^{-1}g \rightarrow g$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для $\forall g \in H$.
- с) При почти всех $t \in]0, T[$ в H существуют сильные производные

$$dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H)), \varepsilon > 0, \text{ и}$$

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} A(t)A_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon > 0. \quad (6)$$

Интегрируя по t один раз по частям, для $\forall c \geq 0$ и $\forall u \in D(L)$ находим

$$\begin{aligned}& \int_0^T e^{c(T-t)} \left(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{du}{dt} \right) dt = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{du}{dt} \right) dt + \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \Phi_\varepsilon(u, u) dt,\end{aligned} \quad (7)$$

где в силу равенства (6) и неравенства (3) форма $\Phi_\varepsilon(u, u)$ оцениваться

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(u, u) &= \left((d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt)u, u \right) - c(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u) \leq \\ &\leq c_2(A_\varepsilon^{-1}(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)A(t)u) - c(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u).\end{aligned}\quad (8)$$

Из равенства (7) в силу (8) и свойства b) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем неравенство

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{c(T-t)} \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 dt &\leq 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left(A(t)u, \frac{du}{dt} \right) dt + \\ &+ (c_2 - c) \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 dt.\end{aligned}\quad (9)$$

Интегрируя по t один раз по частям, для $\forall c \geq 0$ и $\forall u \in D(L)$ получаем

$$\int_0^T e^{c(T-t)} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt \leq 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left(\frac{d^2 u}{dt^2}, \frac{du}{dt} \right) dt - c \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt.$$

Сложим это равенство с неравенством (9) и при $\forall c \geq c_2$ придем к

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{c(T-t)} \left(\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 \right) dt &\leq 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left(Lu, \frac{du}{dt} \right) dt - \\ &- 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left(\frac{B(t)}{t} \frac{du}{dt}, \frac{du}{dt} \right) dt - c \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt.\end{aligned}\quad (10)$$

Здесь левая часть оценивается снизу через $\|u\|_E^2$, а правая часть согласно неравенству (4) при $\forall c \geq 2c_3$ оценивается сверху через

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left(Lu, \frac{du}{dt} \right) dt &\leq 2 \left(\left| \int_0^T (T-t) \left(Lu, e^{c_6(T-t)} \frac{du}{dt} \right) dt \right| / \left\| \frac{du}{dt} \right\|_0 \right) \|u\|_E = \\ &= 2 \left(\left| \int_0^T (T-t) (Lu, v) dt \right| / \left\| e^{c_6(t-T)} v \right\|_0 \right) \|u\|_E \leq 2e^{c_6 T} \|Lu\|_F \|u\|_E, \quad c_6 = \max\{c_2, 2c_3\}.\end{aligned}$$

В результате из неравенства (10) получаем неравенство (5) сначала для гладких решений $u \in D(L)$, которое потом распространяется предельным переходом на все сильные решения $u \in D(\bar{L})$.

Следствие. Из неравенства (5) вытекает корректность в сильном смысле задачи Коши (1), (2) на подпространстве $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$ пространства F , где $R(\bar{L})$ — множество всех значений оператора $\bar{L}$ и $\overline{R(L)}$ — замыкание в F множества всех значений $R(L)$ оператора L .

Литература

1. Гаврилова Н.В., Юрчук Н.И. // Дифференц. уравнения. 1981. Т.17. №5. С.789–795.
2. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. №1. С.34–37.