

для $\forall \delta > 0$, если $c_2 \leq \delta$. Проинтегрируем неравенство (9) по τ от 0 до T , результат разделим на $T(1 + |\mu|^2)$ и при $\delta = \delta_0 = \frac{1 - |\mu|^2}{4T(1 + |\mu|^2)}$ найдем оценку

$$\delta_0 \left(\left\| \frac{du}{dt} \right\|_0^2 + \left\| A^{1/2}(t)u \right\|_0^2 \right) \leq \delta_0^{-1} \|Lu\|_F^2. \quad (10)$$

Поскольку по предположениям теоремы $c_2 \leq \delta_0$, то в силу оценки (10) из неравенства (9) вытекает неравенство (5) для гладких решений $u \in D(L)$, которое затем предельным переходом распространяется на все сильные решения $u \in D(\bar{L})$.

Следствие. В предположениях теоремы для каждого $F = \{f(t), \varphi, \psi\}$ из гильбертова подпространства $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$ пространства F сильное решение $u \in E$ нелокальной задачи Коши (1), (2) существует, единственно и непрерывно зависит от f , φ и ψ , где $R(\bar{L})$ – множество всех значений оператора L и $R(L)$ – замыкание в F множества всех значений $R(L)$ оператора L .

Литература

1. Чесалин В. И., Юрчук Н. И. Задача Коши с нелокальными условиями для абстрактных уравнений Лява // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1973. № 6. С. 30–35.
2. Ломовцев Ф. Е. Гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов // Докл. НАН Беларусі. 2001. Т. 45. № 1. С. 34 – 37.

ОПТИМИЗАЦИЯ ТАЙЛИНГА ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М. А. Урбанович

Высокая латентность каналов связи влечет за собой большие накладные расходы на коммуникации между вычислительными узлами при работе параллельного приложения, что приводит к низкой эффективности программной реализации алгоритма. В работе [1] была предложена идея разбиения на супервершины, получившая название тайлинга. Способ разбиения на супервершины (их форма, размеры), способ отображения

множества супервершин на параллельную архитектуру определяют эффективность реализации алгоритма.

Перспективность тайлинга повлекла за собой ряд исследований с целью разработки методов построения оптимальных разбиений. Результатом этих исследований явился ряд методов оптимизации тайлинга [2-3]. Однако эти методы не затрагивают задачу отображения тайлов на целевую архитектуру.

Таким образом, остается актуальной задача разработки методов построения оптимального тайлинга, которые в полном объеме учитывали бы характеристики целевой параллельной архитектуры, включая ее размерность и размеры.

В данной работе рассмотрен метод оптимизации тайлинга при параллельной реализации численного решения одномерного уравнения теплопроводности на параллельной системе с распределенной памятью. Для отображения алгоритмов используется локально последовательная глобально параллельная (LSGP) стратегия [4]. Эта работа является начальным этапом в распараллеливании алгоритмов с использованием техники тайлинга на основе LSGP стратегии.

Рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности.

В области $0 < x < 1$, $0 < t < T$ нужно найти решение дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$U(0; t) = \mu_1(t), \quad U(1; t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

Функции $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $f(x; t)$ - считаются заданными.

Рассмотрим явную разностную задачу, которая имеет вид:

$$y_{i_1}^{i_2} = \frac{\tau}{h^2} \cdot (y_{i_1+1}^{i_2-1} + y_{i_1-1}^{i_2-1}) + (1 - \frac{\tau}{h^2}) \cdot 2y_{i_1}^{i_2-1} + \tau \cdot \phi_{i_1}^{i_2}; \quad (4)$$

$$i_1 = 1, 2, \dots, N-1; \quad i_2 = 1, 2, \dots, K; \quad N \cdot h = 1; \quad K \cdot \tau = T;$$

$$y_0^{i_2} = \mu_1(t_{i_2}); \quad y_N^{i_2} = \mu_2(t_{i_2}); \quad i_2 = 0, 1, \dots, K;$$

$$y_{i_1}^0 = u_0(x_{i_1}); i_1 = 0, 1, \dots, N.$$

Алгоритм вида (4) характеризуется областью вычислений V и множеством векторов зависимостей Φ . Область вычислений есть подмножество точек целочисленного пространства Z^2 , которое определяется как $V = \{v(i_1, i_2) \in Z^2 \mid 1 \leq i_m \leq I_m, m = 1, 2\}$, где $I_1 = N - 1$, $I_2 = K$. Каждой точке $v(i_1, i_2) \in V$ в соответствии с алгоритмом приписана операция $y_{i_1}^{i_2} = y(i_1, i_2)$. Множество векторов зависимостей $\Phi = \{e_2, e_2 - e_1, e_2 + e_1\}$, где $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, отражает информационные зависимости между операциями алгоритма.

С помощью техники тайлинга разобьем область вычислений алгоритма двумя семействами прямых с нормальными векторами $h_1, h_2 \in Z^2$. Получаемое при этом разбиение области V на тайлы должно удовлетворять следующим условиям:

- 1) тайлы должны быть одинаковы по форме и размеру (за исключением возможно граничных),
- 2) между тайлами не должно существовать обратных связей.

Нормальные векторы h_1 и h_2 определим из конуса допустимых направлений $K_0 = \{h \in Z^2 \mid h \cdot \varphi \geq 0, \varphi \in \Phi\}$ [5]. Из всех возможных вариантов векторов h_1 и h_2 интерес представляет следующий: $h_1 = e_2 + e_1$, $h_2 = e_2 - e_1$. При разбиении гиперплоскостями с такими нормальными векторами образуется регулярная структура с двумя векторами зависимостей между тайлами e_1 и e_2 . Тайл формально можно определить как

$$u(j_1, j_2) = \{v(i_1, i_2) \in V \mid \delta_{\min}^i + (j_i - 1) \cdot r_i \leq h_i \cdot v \leq \delta_{\min}^i + j_i \cdot r_i - 1\}$$

$$1 \leq j_i \leq J_i = \left\lceil \frac{N_i}{r_i} \right\rceil, i = 1, 2$$

где $\delta_{\min}^i = \min_{v \in V} h_i \cdot v$, $N_i = \max_{v \in V} h_i \cdot v - \delta_{\min}^i + 1 = N + K - 2$, $i = 1, 2$.

Вычисляя все параметры, получаем

$$u(j_1, j_2) = \{v(i_1, i_2) \in V \mid 2 + (j_1 - 1) \cdot r_1 \leq i_2 + i_1 \leq j_1 \cdot r_1 + 1,$$

$$1 - I_1 + (j_2 - 1) \cdot r_2 \leq i_2 - i_1 \leq j_2 \cdot r_2 - I_1, 1 \leq i_1 \leq N - 1, 1 \leq i_2 \leq K\}.$$

Параметры r_1 и r_2 используемые в определении тайла, задают его размеры и являются неизменными для всех тайлов. Также было обнаружено, что при выбранных h_1 и h_2 , когда хотя бы одно из чисел r_1 или r_2 является нечетным, количество вершин в тайле не одинаково. Поэтому будем рассматривать только четные r_1 и r_2 . В этом случае тайл содержит $\frac{r_1 \cdot r_2}{2}$ вершин.

Отобразим алгоритм (4) на целевую одномерную параллельную архитектуру, состоящую из P вычислительных узлов, которые пронумерованы от 1 до P .

Зависимость между тайлами характеризуется прямоугольной областью вычислений $U = \{(j_1, j_2) \in Z^2 \mid 1 \leq j_1 \leq J_1, 1 \leq j_2 \leq J_2\}$, содержащей множество тайлов $U^* = \{(j_1, j_2) \in Z^2 \mid 1 \leq j_1 \leq J_1, 1 \leq j_2 \leq J_2, 2 \cdot \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - r_2 + 2 \leq j_1 \cdot r_1 - j_2 \cdot r_2 \leq 2 \cdot \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + r_1 - 2, 2 \cdot \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 2 \leq j_1 \cdot r_1 + j_2 \cdot r_2 \leq 2 \cdot \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 2K + r_1 + r_2 - 4\}$ и множеством векторов зависимостей $\Phi_u = \{e_1, e_2\}$, где каждой точке $u(j_1, j_2) \in U$ приписана макрооперация, состоящая из $\frac{r_1 \cdot r_2}{2}$ операций $y(v), v \in V$.

Пусть $J_1 = \left\lceil \frac{N_1}{r_1} \right\rceil = P$, тогда возьмем $r_1 = \left\lceil \frac{N_1}{P} \right\rceil$.

Согласно LSGP стратегии функцию размещения определим следующим образом: $f(u(j_1, j_2)) = j_1, u \in U$.

Функция таймирования $t: U \rightarrow Z_+$ в данном случае примет вид

$$t(u) = c_1 + \tau \cdot u, u \in U, \tau \in Z^2, c_1 \in Z.$$

Функция t определяет момент начала выполнения каждой макрооперации алгоритма. Функция включает в себя параметры c_1 и τ . Значение параметра c_1 характеризует момент начала выполнения макроопераций на вычислительной системе. Вектор τ в свою очередь определяет порядок выполнения макроопераций.

Введем ряд обозначений.

Пусть t_0 — время, необходимое на выполнение операции $y(i_1, i_2)$. Тогда обозначим $T_{comp} = t_0 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{2}$ — время на выполнение одной макрооперации. Далее, пусть a — время инициализации канала связи, b — время, необходимое на передачу данных, обусловленных информационной зависимостью между макрооперациями, приписанных точкам $u, u + e_1 \in U$. Тогда $T_{comm} = a + b \cdot r_2$ — время на передачу результатов выполнения макрооперации по каналу связи.

В соответствии с введенными определениями и обозначениями вектор τ имеет вид: $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (T_{comp} + T_{comm}, \max\{T_{comp}, T_{comm}\})$ [6].

Момент начала выполнения макрооперации, соответствующей тайлу $u(1, 1)$ есть момент начала выполнения алгоритма. Найдем константу c_1 такую, чтобы установить этот момент в нулевое значение:

$$t(1, 1) = c_1 + \tau_1 + \tau_2 = 0. \text{ Следовательно, } t(1, 1) = 0 \text{ при } c_1 = -\tau_1 - \tau_2.$$

$$\begin{aligned} T(r_2) &= \max_{u \in U} t(u) + \tau_1 = c_1 + \tau_1 \cdot J_1 + \tau_2 \cdot J_2 + \tau_1 = -\tau_1 - \tau_2 + \tau_1 \cdot J_1 + \tau_2 \cdot J_2 + \tau_1 = \\ &= \tau_1 \cdot J_1 + \tau_2 \cdot (J_m - 1) = \left\lceil \frac{N_1}{r_1} \right\rceil (T_{comp} + T_{comm}) + \left(\left\lceil \frac{N_2}{r_2} \right\rceil - 1 \right) \max\{T_{comp}, T_{comm}\} = \\ &= P \cdot \left\lceil \frac{N_1}{P} \right\rceil \frac{t_0 r_2}{2} + P \cdot (a + b \cdot r_2) + \left(\left\lceil \frac{N_2}{r_2} \right\rceil - 1 \right) \cdot \max \left\{ \left\lceil \frac{N_1}{P} \right\rceil \cdot \frac{t_0 r_2}{2}, a + b \cdot r_2 \right\} \end{aligned}$$

Полученная формула, описывающая полное время реализации алгоритма, зависит от переменной r_2 . Таким образом, при заданных параметрах системы, можно минимизировать время реализации алгоритма, найдя оптимальное значение параметра r_2 .

Литература

1. Li G.J., Wah B.W. The design of optimal systolic algorithms // Proc. IEEE 7-th Int. Comput. Softw. and Appl. Conf., Chicago. 1983. - N.Y.: IEEE, 1983. - P.310-319.
2. Boulet P., Darté A., Risset T., Robert Y. // Integration, The VLSIJ. 1994. Vol.17.
3. Xue J. // J. of Parallel and Distributed Computing, 1997. Vol. 1, №42. P.42-59.
4. Кун С. Матричные процессоры на СБИС: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 672 с.
5. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. Санкт-Петербург. БВХ-Петербург. 2002. —608с.
6. Баханович С.В., Соболевский П.И. Отображение алгоритмов на вычислительные системы с распределенной памятью: оптимизация тайлинга для одно- и двумерных топологий. // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук, 2006, № 3.