

2. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. Санкт-Петербург. 2002. 608 с.
3. Косьянчук В. В., Лиходед Н. А., Соболевский П. И., Тиунчик А. А. Смешанная стратегия построения параллельных форм алгоритмов. Май, 1996. Препринт №4(516).

О КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

А. А. Платонов

Рассматривается многокритериальная линейная комбинаторная задача, принцип оптимальности которой задается способом разбиения частных критериев на группы так, что внутри каждой группы действует слейтеровский принцип оптимальности, а между группами – лексикографический. Получена формула радиуса квазиустойчивости задачи в метрике l_∞ . В качестве следствий приводится ряд результатов качественного характера.

В широком смысле под устойчивостью дискретной задачи понимают наличие такой окрестности исходных данных в пространстве параметров задачи, что по отношению к начальной всякая «возмущенная» задача с параметрами из этой окрестности обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности. В частности, свойство полу непрерывности сверху (снизу) по Хаусдорфу оптимального отображения эквивалентно свойству не появления новых (сохранения исходных) оптимальных решений задачи при «малых» возмущениях ее параметров. В этом контексте соответственно возникает понятие устойчивости и квазиустойчивости задач дискретной оптимизации (см., например, [1, 2]).

Рассмотрим типичную векторную (n -критериальную) комбинаторную задачу. Пусть на системе подмножеств (траекторий) $T \in 2^E$, $|T| \geq 2$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m \geq 2$, задан векторный критерий

$$f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \dots, f_n(t, A_n)) \rightarrow \min_{t \in T},$$

частными критериями которого являются функции вида

$$f_i(t, A_i) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

где $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$, A_i – i -я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in R^{n \times m}$. Будем полагать, что $f_i(\emptyset, A_i) = 0$.

В пространстве R^P произвольной размерности $p \in N$ определим три бинарных отношения строгого предпочтения согласно формулам

$$y \succ_{Sl} y' \Leftrightarrow y_i > y'_i, i \in N_p,$$

$$y \succ_{Sm} y' \Leftrightarrow y_i \geq y'_i, i \in N_p,$$

$$y \succ_{lex} y' \Leftrightarrow y_k \geq y'_k,$$

где $k = \min\{i \in N_p : y_i \neq y'_i\}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$, $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_p)$.

Эти отношения порождают соответственно следующие широко известные объекты векторной оптимизации:

- множество Слейтера (слабо эффективных траекторий)

$$Sl^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T (f(t, A) \not\prec_{Sl} f(t', A))\},$$

- множество Смейла (строго эффективных траекторий)

$$Sm^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T \setminus \{t\} (f(t, A) \not\prec_{Sm} f(t', A))\},$$

- лексикографическое множество траекторий

$$L^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T (f(t, A) \not\prec_{lex} f(t', A))\}.$$

Здесь, как обычно, символ $\not\prec$ означает отрицание отношения $\succ$. Пусть $s \in N_n$, $I = \{I_1, I_2, \dots, I_s\}$ – разбиение множества N_n на s непустых непересекающихся подмножеств (групп), т. е. $N_n = \bigcup_{r \in N_s} I_r$.

Каждому такому разбиению I в критериальном пространстве R^n поставим в соответствие бинарное отношение строгого предпочтения Ω_I^n между различными векторами $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$, полагая $y \Omega_I^n y' \Leftrightarrow y_{I_k} \succ_{Sl} y'_{I_k}$, где $k = \min\{i \in N_s : y_{I_i} \neq y'_{I_i}\}$; y_{I_k} и y'_{I_k} – проекции соответственно векторов y и y' на координатные оси пространства R^n с номерами группы I_k .

Введенное бинарное отношение Ω_I^n задает такой принцип упорядоченности сформированных групп критериев, в котором каждая предыдущая группа существенно важнее всех последующих. В результате это отношение порождает множество I -эффективных траекторий в соответствии с правилом

$$T^n(A, I) = \{t \in T : \forall t' \in T (f(t, A) \Omega_I^n f(t', A))\}.$$

Очевидно, что множество $T^n(A, I_{Sl})$, где $I_{Sl} = \{N_n\}$ ($s=1$), есть множество Слейтера $Sl^n(A)$, а множество $T^n(A, I_L)$, где $I_L = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ ($s=n$), совпадает с лексикографическим множеством $L^n(A)$. Векторную задачу поиска множества $T^n(A, I)$ будем обозначать через $Z^n(A, I)$.

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество из возмущающих матриц $\Psi(\varepsilon) = \{A' \in R^{n \times m} : \|A'\| < \varepsilon\}$, где $\|A'\| = \max\{|a'_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}$, $A' = [a'_{ij}]$.

Определение 1. Векторная задача $Z^n(A, I)$, $n \geq 1$, называется квазиустойчивой (к возмущениям элементов матрицы A), если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой возмущающей матрицы $A' \in \Psi(\varepsilon)$ справедливо включение $T^n(A, I) \subseteq T^n(A + A', I)$.

Определение 2. Радиусом квазиустойчивости векторной задачи $Z^n(A, I)$, $n \geq 1$, назовем число

$$\rho^n(A, I) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где $\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall A' \in \Psi(\varepsilon) (T^n(A, I) \subseteq T^n(A + A', I))\}$.

По двум различным траекториям t и t' определим пару чисел : $\Delta(t, t') = |(t \cup t') \setminus (t \cap t')|$, $d^n(t, t', A) = \max_{i \in I_1} \frac{f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)}{\Delta(t, t')}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. При любом разбиении $I = \{I_1, I_2, \dots, I_s\}$ множества N_n , $n \geq 1$, на s групп, $s \in N_n$, радиус квазиустойчивости $\rho^n(A, I)$ задачи $Z^n(A, I)$ имеет вид

$$\rho^n(A, I) = \min_{t \in T^n(A, I)} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} d^n(t, t', A).$$

Непосредственно из теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Для радиуса квазиустойчивости задачи $Z^n(A, I_{Sl})$, $n \geq 1$, поиска множества Слейтера $Sl^n(A)$ справедлива формула

$$\rho^n(A, I_{Sl}) = \min_{t \in Sl^n(A)} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \max_{i \in N_n} \frac{f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)}{\Delta(t, t')}.$$

Формула радиуса квазиустойчивости, приведенная в следствии 1, легко превращается в формулу радиуса квазиустойчивости скалярной траекторной задачи с линейным критерием [3].

Следствие 2. Для радиуса квазиустойчивости задачи $Z^n(A, I_L)$, $n \geq 1$, поиска лексикографического множества $L^n(A)$ справедлива формула

$$\rho^n(A, I_L) = \min_{t \in L^n(A)} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \frac{f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)}{\Delta(t, t')}.$$

Следствие 3. При любом разбиении I множества N_n , $n \geq 1$, на s групп, $s \in N_n$, задача $Z^n(A, I)$, $n \geq 1$, квазиустойчива тогда и только тогда, когда $\forall t \in T^n(A, I) \quad \forall t' \in T \setminus \{t\} \quad \exists i \in I_1 \quad (f_i(t', A_i) > f_i(t, A_i))$.

Из следствия 3 получаем следующие сопутствующие результаты.

Следствие 4. Задача $Z^n(A, I_{Sl})$, $n \geq 1$, поиска множества Слейтера $Sl^n(A)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда множества $Sl^n(A)$ и $Sm^n(A)$ совпадают.

Легко понять, что для скалярной линейной траекторной задачи совпадение множеств Слейтера и Смейла эквивалентно существованию единственного оптимального решения.

Поэтому частным случаем следствия 4 является

Следствие 5. Однокритериальная (скалярная) линейная траекторная задача квазиустойчива тогда и только тогда, когда она имеет единственное решение.

Следствие 6. Для того чтобы задача $Z^n(A, I_L)$, $n \geq 1$, поиска лексикографического множества $L^n(A)$ была квазиустойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$|L^n(A)| = \left| \text{Arg} \min_{t \in T} f_1(t, A_1) \right| = 1.$$

Литература

1. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. № 4. С. 645–676.
2. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 79–92.
3. Леонтьев В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах // Сб.: Проблемы кибернетики. 1979. Т. 35. С. 169–184.