

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО СПЕЦПРОЦЕССОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Л. И. Петровская

Организация вычислений на многопроцессорных устройствах с заданной топологией соединений между отдельными процессорными элементами тесно связана с задачей построения специальных параллельных форм вычислительных алгоритмов, реализуемых на таких устройствах. При этом на этапе разработки параллельных алгоритмов необходимо учитывать как топологические и функциональные ограничения, накладываемые технологией производства, так и ограниченность количества имеющихся процессорных элементов. Решение первой из этих задач достигается использованием специальных (графовых) представлений разрабатываемых алгоритмов, решение второй – за счет построения параллельных форм алгоритмов фиксированной ширины.

В данной работе для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

с начальными $u(x, 0) = f^{(0)}(x)$ и краевыми $u(0, t) = f_0(t), u(1, t) = f_1(t)$ условиями, используя двухслойную явную разностную схему

$$y(i, 0) = f^{(0)}(ih), \quad y(0, j) = f_0(j\tau), \quad y(N, j) = f_1(j\tau),$$

$$y(i, j) = \left(1 - \frac{2a\tau}{h^2}\right)y(i, j-1) + \frac{a\tau}{h^2}y(i+1, j-1) + \frac{a\tau}{h^2}y(i-1, j-1) + f(i, j-1),$$

$$1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq M,$$

спроектирован линейный спецпроцессор с фиксированным числом Δ процессорных элементов.

Для решения поставленной задачи применена локально параллельная глобально последовательная стратегия построения параллельного алгоритма фиксированной ширины [1]. Согласно этой стратегии алгоритм (или граф зависимостей алгоритма) решения исходной задачи разбивается на части. Полученные части отображаются на вычислительный граф с заданным числом вершин Δ .

Обозначим $V = \{(i, j) | 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq M\}$ – индексное пространство, множеству точек которого ставится во взаимно однозначное соответствие множество операций (макроопераций) алгоритма (1), $E = \{(v_1, v_2) \in V \times V, v_2 = v_1 + \square, \square \in \Phi\}$ – множество дуг, соединяющих инфор-

мационно связанные вершины, $\Phi = \{\varphi^{(1)} = (-1,1), \varphi^{(2)} = (0,1), \varphi^{(3)} = (1,1)\}$ – множество векторов зависимостей алгоритма таких, что каждая дуга графа задается одним из этих векторов. Таким образом, получим граф зависимостей алгоритма $G = (V, E)$. Этот граф является строго направленным [2], так как конус допустимых направлений $K(G) = \{\tau \in Z^2 \mid \tau \cdot \varphi^{(k)} > 0, \forall \varphi^{(k)} \in \Phi\}$ не пуст и определяется системой неравенств $\tau_2 \geq |\tau_1| + 1$.

Зададим невырожденное отображение $\pi: Z^2 \rightarrow Z^1$ где $\pi(\varphi) \in \{(0), (1)\}$, $\varphi \in \Phi$. Этому условию удовлетворяет только оператор, $\pi(i, j) = j$. При отображении оператором π вершины ввода $f_0(\frac{j}{M})$ и $f_1(\frac{j}{M})$ отображаются во внутренние процессорные элементы. Для того чтобы они проектировались в граничные процессорные элементы, расширим индексное пространство V до $V' = V_{-1} \cup V_0 \cup V_{+1}$, где $V_{-1} = \{(i, j) \in Z^2 \mid -M + 2 \leq i \leq 0, 1 \leq j \leq M\}$, $V_0 = \{(i, j) \in Z^2 \mid 1 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq M\}$, $V_{+1} = \{(i, j) \in Z^2 \mid N \leq i \leq N + M - 2, 1 \leq j \leq M\}$ – области, в которых осуществляется транспортировка краевых условий.

Так как область V' состоит из объединения областей V_{-1}, V_0, V_{+1} , в каждой из которых вершинам соответствуют различные типы макроопераций, и при отображении π в каждый процессорный элемент линейного спецпроцессора отображаются вершины трех типов, то для того, чтобы различать эти макрооперации при вычислении, введем дополнительные переменные – метки m_{-1}, m_0, m_{+1} для вершин из V_{-1}, V_0, V_{+1} соответственно.

Определим $\Gamma = \left\lceil \frac{\max_{v \in V'} \pi(v) - \min_{v \in V'} \pi(v) + 1}{\Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil$, где $\lceil a \rceil = \min \{z \in Z \mid z \geq a\}$,

$$U_\gamma = \{v \in V' \mid 1 + (\gamma - 1)\Delta \leq \pi(v) \leq \gamma\Delta\}, U^\delta = \bigcup_{\gamma=1}^{\Gamma} U_\gamma^\delta, U_\gamma^\delta = \{v \in U_\gamma \mid \pi(v) = (\gamma - 1)\Delta + \delta\}, 1 \leq \gamma \leq \Gamma, 1 \leq \delta \leq \Delta.$$

Кусочно аффинную таймирующую функцию определим равенством

$$t(v) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} (c_\gamma + \tau \cdot v) 1_{U_\gamma}(v), \text{ где константы } c_\gamma \text{ и } \tau \text{ выбираются из условий}$$

$0 < |\tau_1| \leq \tau_2 - 1$ и $t(v + \varphi) > t(v)$, $v, v + \varphi \in \Phi$. Минимальная высота параллельной формы алгоритма при фиксированном τ достигается при $c_1, c_2, \dots, c_\Gamma$, задаваемым рекуррентным соотношением

$$c_{\gamma+1} = c_{\gamma} + \max\{-x_{\gamma}, y_{\gamma}\}, \quad 1 \leq \gamma \leq \Gamma - 1,$$

$$x_{\gamma} = \min_{\varphi \in \Phi_{\gamma}} \tau \cdot \varphi - 1, \quad \Phi_{\gamma} = \{-e_1 + e_2, e_2, e_1 + e_2\},$$

$$y_{\gamma} = \max_{1 \leq \delta \leq \Delta} \{ \max_{v \in U_{\gamma}^{\delta}} \tau \cdot v - \min_{v \in U_{\gamma+1}^{\delta}} \tau \cdot v \} + 1 \quad [3].$$

Время решения задачи определяется функцией

$$\begin{aligned} T(|\tau_1|, \tau_2) &= \max_{v \in V'} t(v) - \min_{v \in V'} t(v) + \max_{1 \leq r \leq 3} \tau \cdot \varphi^{(r)} = \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil - 1 + \\ &+ \max \left\{ |\tau_1| (M + N + \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil - 1) + \tau_2 (M - \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil + 2), \right. \\ &\left. |\tau_1| (M + N - 2 + (\left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil - 1)(2M + N - 4)) + \tau_2 (M + 1 - (\left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil - 1)\Delta) \right\}. \end{aligned}$$

В силу линейности функции $T(|\tau_1|, \tau_2)$ имеем $\min_{0 < |\tau_1| \leq \tau_2 - 1} T(|\tau_1|, \tau_2) = T(1, 2) = M + 2\Delta + 3 + \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil (2M + N - 2\Delta - 3)$. Тогда таймирующая функция примет вид $t(i, j) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} (i + 2j + M - 3 + (\gamma - 1)(2M + N - 2\Delta - 3)) 1_{U_{\gamma}}(i, j)$.

Вычислим задержки в вершине $v \in V$ по дуге $(v, v + \varphi^{(k)}) \in E$, $\varphi^{(k)} \in \Phi$, $1 \leq k \leq K$. Если $v, v + \varphi \in U_{\gamma}$, $1 \leq \gamma \leq \Gamma$, то и $h_{\varphi^{(1)}} = 1$, $h_{\varphi^{(2)}} = 2$, $h_{\varphi^{(3)}} = 3$. Если $v \in U_{\gamma}$, $v + \varphi \in U_{\gamma+1}$, $1 \leq \gamma \leq \Gamma - 1$, то

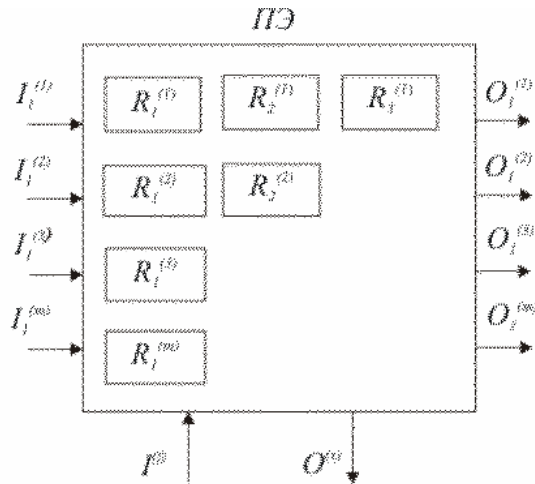


Рис. 1. Структурная схема процессорного элемента

$$h_{\varphi}(v) = c_{\gamma+1} - c_{\gamma} + \tau \cdot \varphi,$$

и

$$h_{\varphi(1)} = 2M + N - 2\Delta - 2, \quad h_{\varphi(2)} = 2M + N - 2\Delta - 1, \quad h_{\varphi(3)} = 2M + N - 2\Delta.$$

Процесс приема, вычисления и передачи информации, происходящие в процессорном элементе, представим в виде описания функционирования локальной памяти процессорного элемента:

$$R_1^{(1)}(t) = \begin{cases} I_{(1)}^{(1)}, I_{(1)}^{(m)} = m_{-1}, \\ (1 - \frac{2aN^2}{M})I_{(1)}^{(2)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(1)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(3)} + f, I_{(1)}^{(m)} = m_0, \end{cases}$$

$$R_2^{(1)}(t+1) = R_1^{(1)}(t), R_3^{(1)}(t+2) = R_2^{(1)}(t+1), O_1^{(1)} = R_3^{(1)}(t+2),$$

$$R_1^{(2)}(t) = (1 - \frac{2aN^2}{M})I_{(1)}^{(2)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(1)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(3)} + f, I_{(1)}^{(m)} = m_0,$$

$$R_2^{(2)}(t+1) = R_1^{(2)}(t), O_1^{(2)} = R_2^{(2)}(t+1),$$

$$R_1^{(3)}(t) = \begin{cases} I_{(1)}^{(3)}, I_{(1)}^{(m)} = m_{+1}, \\ (1 - \frac{2aN^2}{M})I_{(1)}^{(2)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(1)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(3)} + f, I_{(1)}^{(m)} = m_0, \end{cases}$$

$$O_1^{(3)} = O_1^{(x)} = R_1^{(3)}(t),$$

$$R_1^{(m)}(t) = I_{(1)}^{(m)}, O_1^{(m)} = R_1^{(m)}(t).$$

Полное время решения задачи спроектированным линейным спецпроцессором $M + 2\Delta + 3 + \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil (2M + N - 2\Delta - 3)$ такта, где такт определяется временем выполнения одной макрооперации алгоритма (1).

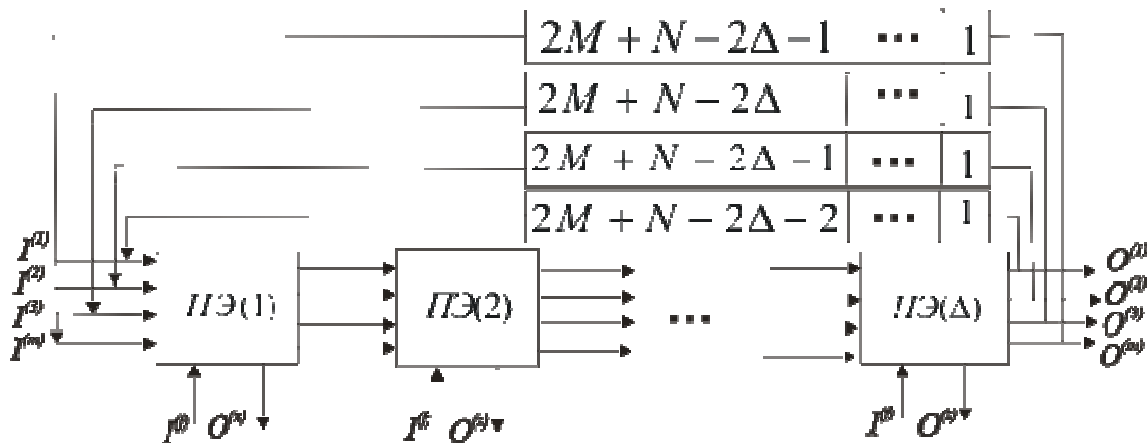


Рис. 2. Структурная схема спроектированного спецпроцессора

Литература

1. Кун С. Матричные процессоры на СБИС: Пер. – М.: Мир, 1991.

2. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. Санкт-Петербург. 2002. 608 с.
3. Косьянчук В. В., Лиходед Н. А., Соболевский П. И., Тиунчик А. А. Смешанная стратегия построения параллельных форм алгоритмов. Май, 1996. Препринт №4(516).

О КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

А. А. Платонов

Рассматривается многокритериальная линейная комбинаторная задача, принцип оптимальности которой задается способом разбиения частных критериев на группы так, что внутри каждой группы действует слейтеровский принцип оптимальности, а между группами – лексикографический. Получена формула радиуса квазиустойчивости задачи в метрике l_∞ . В качестве следствий приводится ряд результатов качественного характера.

В широком смысле под устойчивостью дискретной задачи понимают наличие такой окрестности исходных данных в пространстве параметров задачи, что по отношению к начальной всякая «возмущенная» задача с параметрами из этой окрестности обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности. В частности, свойство полу непрерывности сверху (снизу) по Хаусдорфу оптимального отображения эквивалентно свойству не появления новых (сохранения исходных) оптимальных решений задачи при «малых» возмущениях ее параметров. В этом контексте соответственно возникает понятие устойчивости и квазиустойчивости задач дискретной оптимизации (см., например, [1, 2]).

Рассмотрим типичную векторную (n -критериальную) комбинаторную задачу. Пусть на системе подмножеств (траекторий) $T \in 2^E$, $|T| \geq 2$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m \geq 2$, задан векторный критерий

$$f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \dots, f_n(t, A_n)) \rightarrow \min_{t \in T},$$

частными критериями которого являются функции вида

$$f_i(t, A_i) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

где $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$, A_i – i -я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in R^{n \times m}$. Будем полагать, что $f_i(\emptyset, A_i) = 0$.

В пространстве R^P произвольной размерности $p \in N$ определим три бинарных отношения строгого предпочтения согласно формулам