ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ

А. В. Мотевич

Задача Гурса для двумерного гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с постоянными областями определения изучалась в [1]. В данной работе доказана теорема единственности и устойчивости сильных решений задачи Гурса в случае переменных областей определения операторного коэффициента.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $T =]0,T_1[\times]0,T_2[$ – ограниченный прямоугольник на плоскости R^2 переменных $t=\{t_1,t_2\}$ и H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Рассмотрим в T уравнение

$$\mathcal{L}(t)u \equiv \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)u(t) = f(t), \tag{1}$$

с условиями Гурса:

$$l_1 u \equiv u|_{t_2=0} = \varphi_1(t_1), \qquad l_2 u \equiv u|_{t_1=0} = \varphi_2(t_2), \tag{2}$$

где φ_1 и φ_2 – функции переменных $t_1 \in]0,T_1[$ и $t_2 \in]0,T_2[$ со значениями в H соответственно, удовлетворяющие условию согласования

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0). \tag{3}$$

Здесь u и f – функции переменной t со значениями в H, $A(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, удовлетворяющие следующим условиям.

I. При каждом $t \in T$ операторы $A(t)$ самосопряжены и положительно-определены на $D(A(t))$ в H.

II. При каждом $t \in T$ обратные операторы $A^{-1}(t) \in L_\infty(T, L(H))$ в H сильно непрерывны по $t \in T$ и имеют сильные частные производные $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i \in L_\infty(T, L(H))$ такие, что справедливы неравенства

$$-\Big((\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)g, g\Big) \le c_2 \Big(A^{-1}(t)g, g\Big) \quad \forall g \in H,\ c_2 \ge 0,\ i = 1, 2. \tag{4}$$

Выведем априорную оценку сильных решений данной задачи Гурса.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначим $\mathbb{H}=L_2(T,H)$. Задаче Гурса (1) – (3) соответствует линейный неограниченный оператор $L=\{\mathcal{L}(t),l_1,l_2\}:E\supset D(L)\to F$, действующий из банахова пространства E – пополнения множества

$$D(L)=\{u\in\mathbb{H}:u(t)\in D(A(t))\forall t\in[0,T_1]\times[0,T_2],\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_i},A(t)u\in\mathbb{H},i=1,2\}$$

по норме

$$\|u\|_E=\left(\sup_{t\in T}\left[\int_0^{T_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|^2\right)dt_1+\int_0^{T_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|^2\right)dt_2\right]\right)^{1/2}$$

в гильбертово пространство $F=\mathbb{H}\times H_1\times H_2$ всех элементов $\Phi=\{f(t),$ $\varphi_1(t_1),\varphi_2(t_2)\}$ с нормой $\|\Phi\|_F=\left(\int_T|f(t)|^2\,dt+\|\varphi_1\|^2_{H_1}+\|\varphi_2\|^2_{H_2}\right)^{1/2}$, где H_1 – замыкание $D(L)$ по норме $\|v\|_{H_1}=\left(\int_0^{T_1}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial t_1}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(t_1,0)v\right|^2\right)dt_1\right)^{1/2}$, H_2 – замыкание $D(L)$ по норме $\|w\|_{H_2}=\left(\int_0^{T_2}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(0,t_2)w\right|^2\right)dt_2\right)^{1/2}$.

Линейный оператор L допускает замыкание $\bar{L}:E\supset D(\bar{L})\to F$.

Лемма. Если оператор $A(t)$ удовлетворяет условию I и множество $D(L)$ плотно в $\mathbb{H}$, то линейный оператор L замыкаем.

Доказательство. По критерию замыкаемости линейных операторов необходимо доказать, что если $\{u_n\}\in D(L)$, $u_n\to 0$ в E и $Lu_n\to\Phi$ в F при $n\to\infty$, то $\Phi=(f,\varphi_1,\varphi_2)=0$.

Поскольку $u_n\to 0$ в E и операторы следов $l_1:E\to H_1$ и $l_2:E\to H_2$ непрерывны, то $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$. Покажем, что $f=0$. Для $\forall v\in D(L)$

$$\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(f(t),v(t))dt_1dt_2=\lim_{n\to\infty}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1\partial t_2}+A(t)u_n,v\right)dt_1dt_2=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{T_2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t_2}, v \right)\Big|_{t_1=0}^{t_1=T_1} dt_2 + \lim_{n\to\infty} \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \left[-\left(\frac{\partial u_n}{\partial t_2}, \frac{\partial v}{\partial t_1} \right) + (u_n, A(t)v) \right] dt_1 dt_2 = 0,$$

так как $u_n \to 0$ в E при $n \to \infty$. Отсюда, в силу плотности $D(L)$ в $\mathbb{H}$, следует, что $f = 0$. Таким образом, получили, что $\Phi = 0$.

Определение. Решения операторного уравнения $\bar{L}u = \Phi$, $\Phi =$ $(f, \varphi_1,$ $\varphi_2)$ $\in F$, называются **сильными решениями** задачи Гурса (1) – (3).

3. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГУРСА

Установим априорную оценку сильных решений задачи Гурса.

Теорема 1. Если выполняются условия I, II и множество $D(L)$ плотно в $\mathbb{H}$, то справедливо неравенство

$$\| u \|_E \le c_3 \| \bar{L}u \|_F \ \forall u \in D(\bar{L}), \quad c_3 = \sqrt{2\exp\{c_4(T_1+T_2\}}, \quad c_4 = \max\{c_2, 1\}. \quad (5)$$

Доказательство. Введем в H семейство абстрактных операторов сглаживания $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1} \in \mathcal{L}(H), \varepsilon > 0$, со значениями в $D(A(t))$, которые обладают следующими свойствами:

1) для $\forall t \in T$ и $\forall v \in H$ норма $| A_\varepsilon^{-1}(t)v - v | \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) они имеют сильные производные $\partial A_\varepsilon^{-1}(t)/\partial t_i \in L_\infty(\mathbb{H}, \mathcal{L}(H)), \varepsilon > 0,$ и

$$\partial\Big(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) \Big)/\partial t_i = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\Big(\partial A(t)^{-1}/\partial t_i \Big) A(t)A_\varepsilon^{-1}(t), \ \varepsilon > 0, \ i = 1,2. \quad (6)$$

Уравнение (1) умножаем скалярно в H на $A_\varepsilon^{-1}(t)e^\theta \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right)$, где $\theta = c(\tau_1 - t_1 + \tau_2 - t_2)$, и результат интегрируем по $D_\tau = [0,\tau_1]\times[0,\tau_2]$, где $\tau = \{\tau_1, \tau_2\}$, $T = \{T_1, T_2\}$. В частности, интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_2} e^\theta \Big(AA_\varepsilon^{-1}u, u \Big)\Big|_{t_1=\tau_1} dt_2 &= 2\,\mathrm{Re}\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} e^\theta \left(AA_\varepsilon^{-1}u, \frac{\partial u}{\partial t_1} \right) dt_1 dt_2 + \\ &+ \int_0^{\tau_2} e^{c(\tau_1+\tau_2-t_2)} \Big(AA_\varepsilon^{-1}u, u \Big)\Big|_{t_1=0} dt_2 + \int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} e^\theta \Phi_{1,\varepsilon}(u,u) dt_1 dt_2 \ \forall c \ge 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где ввиду равенств (6) и неравенств (4) для формы $\Phi_{1,\varepsilon}(u,u)$ верна оценка

$$\Phi_{1,\varepsilon}(u,u) = \left(\frac{\partial\Big(AA_\varepsilon^{-1} \Big)}{\partial t_1} u, u \right) - c\Big(AA_\varepsilon^{-1}u, u \Big) = -\left(\frac{\partial A^{-1}}{\partial t_1} AA_\varepsilon^{-1}u, AA_\varepsilon^{-1}u \right) -$$

$$-c\left(AA_{\varepsilon}^{-1}u,u\right)\le c_2\left(A^{-1}AA_{\varepsilon}^{-1}u,AA_{\varepsilon}^{-1}u\right)-c\left(AA_{\varepsilon}^{-1}u,u\right).$$

В силу этой оценки и предела при $\varepsilon\to 0$ из (7) для $\forall c\ge c_2$ получаем

$$\int_0^{\tau_2}e^{c(\tau_2-t_2)}\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|^2\Big|_{t_1=\tau_1}dt_2\le 2\operatorname{Re}\int_{D_\tau}e^{\theta}\left(Au,\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)dt+\int_0^{\tau_2}e^{c(\tau_1+\tau_2-t_2)}\left|A^{\frac{1}{2}}(0,t_2)u\right|^2dt_2.$$

Благодаря формулам (6), (4) и 1), аналогично находим неравенство

$$\int_0^{\tau_1}e^{c(\tau_1-t_1)}\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|^2\Big|_{t_2=\tau_2}dt_1\le 2\operatorname{Re}\int_{D_\tau}e^{\theta}\left(Au,\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt+\int_0^{\tau_1}e^{c(\tau_1+\tau_2-t_1)}\left|A^{\frac{1}{2}}(t_1,0)u\right|^2dt_1.$$

Интегрированием один раз по частям выводится равенство

$$\int_0^{\tau_1}e^{\theta}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=\tau_2}dt_1+\int_0^{\tau_2}e^{\theta}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\Big|_{t_1=\tau_1}dt_2=2\operatorname{Re}\int_{D_\tau}e^{\theta}\left(\frac{\partial^2u(t)}{\partial t_1\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt+$$

$$+\int_0^{\tau_1}e^{\theta}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=0}dt_1+\int_0^{\tau_2}e^{\theta}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\Big|_{t_1=0}dt_2-c\int_{D_\tau}e^{\theta}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2dt-c\int_{D_\tau}e^{\theta}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2dt.$$

Складываем его с двумя последними неравенствами, в полученном неравенстве проводим элементарные оценки, берем точную верхнюю грань по $t\in T$ и при $\forall c\ge c_4$, $c_4=\max\{c_2,1\}$, приходим к оценке

$$\|u\|_E\le\sqrt{2e^{c(T_1+T_2)}}\,\|Lu\|_F\quad\forall u\in D(L).\tag{8}$$

Априорная оценка (5) для сильных решений $u\in D(\overline{L})$ получается предельным переходом из оценки (8) для гладких решений $u\in D(L)$.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает следующая

Теорема 2. Если в предположениях теоремы 1 для данных $f\in\mathbb{H}$, $\varphi_1\in H_1$, $\varphi_2\in H_2$ сильное решение $u\in E$ задачи Гурса (1)–(3) существует, то оно единственно и непрерывно зависит от $\{f,\varphi_1,\varphi_2\}\in R(\overline{L})$, где $R(\overline{L})$ – множество всех значений оператора $\overline{L}$.

Литература

1. *Бриш Н. И., Юрчук Н. И.* // Дифференц. уравнения. 1971.Т. 7, №6. С. 1017–1030.
2. *Ломовцев Ф. Е.* // Докл. НАН РБ. 2001. Т. 45, № 1. С. 3437.