НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Д. М. Костян

Свойства решений уравнений Пенлеве изучались с различных точек зрения (см. на пример [1] – [5]) , хотя первоначально они были открыты из классификации Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$w'' = R(z, w, w'), \tag{1}$$

где функция $R(z, w, w')$ является рациональной по w, w' и локально-аналитической по z, без подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [6]. Наличие свойства Пенлеве у уравнений и систем тесно связано с их интегрируемостью [7]. В настоящее время уравнения Пенлеве имеют широкие приложения в теории изомонодромной деформации линейных систем, теории абелевых интегралов и алгебраической геометрии, теории случайных матриц, а также они нашли различные физические приложения.

Рассмотрим уравнение $({}_4\tilde{P}_2)$

$$w^{(4)} = 10w^2w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 + zw - \beta(w'' - 2w^3) - 2\gamma w + \alpha, \tag{2}$$

где w – неизвестная функция, зависящая от переменной z, а $\alpha, \beta, \gamma \in C$ – параметры.

Теорема 1 [3]: Пусть $w = w(z, \alpha, \beta, \gamma)$ решения уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$, тогда Беклунд-преобразования

$$T : w \to \tilde{w} = -w + (2\alpha + 1)\big/(2\tilde{L}_2[-w' - w^2] - z), \tag{3}$$

$$T^{-1} : \tilde{w} \to w = -\tilde{w} + (2\tilde{\alpha} - 1)\big/(2\tilde{L}_2[\tilde{w}' - \tilde{w}^2] - z) \tag{4}$$

задают решение уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$, где $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = (\alpha + 1, \beta, \gamma)$, $\tilde{L}_2[u] = u'' + 3u + \beta u + \gamma$.

Теорема 2 [3]: Уравнение $({}_4\tilde{P}_2)$ имеет рациональное решение $w = w(z)$, тогда и только тогда, когда $\alpha \in Z$. Для всех таких α существует единственное рациональное решение.

Так как $w = 0$ является решением уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$ то, воспользовавшись Беклунд-преобразованиями T, T^{-1}, найдем для него рациональные решения при всех $\alpha \in Z$. При $\gamma = 0$ для $\alpha = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ они имеют вид:

$$w(z,\pm 1,\beta)=\mp 1/z,$$
$$w(z,\pm 2,\beta)=\pm(-2z^3+4\beta)/(z^4+4\beta z),$$
$$w(z,\pm 3,\beta)=\mp\frac{3(z^8+8\beta z^5+96z^3+160z^2\beta^2)}{(z^3+4\beta)(z^6+20\beta z^3-144z-80\beta^2)}.$$

Теорема 3: Для уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$ при $\alpha\in\{0,\pm 1,...,\pm 9\}$ число полюсов m удовлетворяет соотношению $m=\alpha^2$.

Теорема 4: Для уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$ при $\alpha\in\{0,\pm 1,...,\pm 4\}$ вычеты полюсов удовлетворяет соотношению $res_{z=z_0}w(z)=c_{-1},c_{-1}\in\{\pm 1\}$.

Рассмотрим первый член иерархии Каупа-Купершмидта – уравнение $({}_4\tilde{K}_2)$, которое записывается следующим образом

$$w^{(4)}=5w^2w''-5w'w''+5w(w')^2-w^5+(\lambda z+\alpha)w+\gamma=0, \tag{5}$$

где w – неизвестная функция, зависящая от переменной z, а $\alpha,\gamma,\lambda\in C$ – параметры.

Теорема 5 [4]: Беклунд-преобразования для уравнения (5) имеют вид:

$$T_1: w\to\tilde{w}=w-(2\gamma+\lambda)/(2D_1[w]), \tag{6}$$

где $\tilde{\gamma}=-\gamma-\lambda,\tilde{\lambda}=\lambda,\tilde{\alpha}=\alpha$, и

$$D_\varepsilon[w]=-w^3-\frac{3\varepsilon+1}{2}ww'''+\frac{3\varepsilon-9}{4}(w')^2+\frac{5-3\varepsilon}{2}w^2w'+\frac{3\varepsilon-1}{4}w^4+\frac{1-3\varepsilon}{4}(\lambda z+\alpha)$$

$$T_2: w\to\tilde{w}=w-2(\gamma-\lambda)/2D_2[w], \tag{7}$$

где $\tilde{\gamma}=-\gamma+2\lambda,\tilde{\lambda}=\lambda,\tilde{\alpha}=\alpha$.

Если применить композицию отображений (6), (7) $T=T_2T_1$, то соотношение параметров будет $\tilde{\gamma}=\gamma+3\lambda,\tilde{\lambda}=\lambda,\tilde{\alpha}=\alpha$, при этом преобразование $T^{-1}=T_1T_2$, $\tilde{\gamma}=\gamma-3\lambda,\tilde{\lambda}=\lambda,\tilde{\alpha}=\alpha$ и $T^{-1}T=TT^{-1}=I$. Так как $w=0$ решение уравнения $({}_4\tilde{K}_2)$, то с помощью преобразования T_1 получаем, что $w=\lambda/(\alpha+\lambda z)$ при $\gamma/\lambda=-1$ решение уравнения $({}_4\tilde{K}_2)$. Далее, применяя к ним T,T^{-1}, получим рациональные решения для всех $\gamma/\lambda=3n-1$ и $\gamma/\lambda=3n$, где $n\in Z$.

Пусть m – число полюсов уравнения $({}_4\tilde{K}_2)$. При $\gamma/\lambda=3$ – $m=1$, при $\gamma/\lambda=5$ – $m=10$, при $\gamma/\lambda=6$ – $m=6$, при $\gamma/\lambda=9$ – $m=36$.

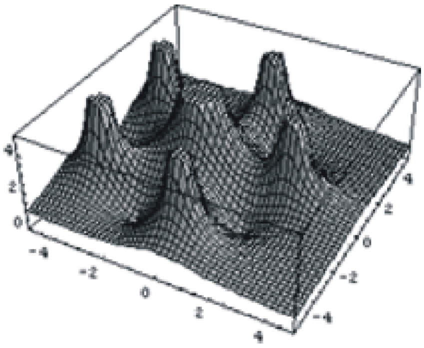

Рис 1

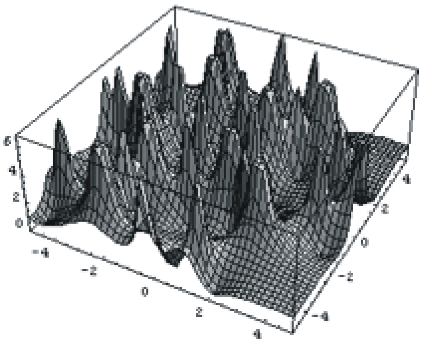

Рис **2**

На следующих рисунках изображен модуль рационального решения уравнения $({}_4\widetilde{K}_2)$ на комплексной плоскости при $\gamma/\lambda = 6$ (рис. 1) и $\gamma/\lambda = 9$ (*рис*. 2).

Матричные аналоги уравнений Пенлеве могут возникать в ситуациях и моделях, аналогичных тем, в которых возникают скалярные уравнения Пенлеве. Однако это не всегда справедливо [8],[9].

Уравнение Риккати имеет вид

$$w' = \alpha w^2 + \beta w + \gamma \,, \tag{8}$$

где w – неизвестная функция, зависящая от переменной z, а $\alpha, \beta, \gamma \in C$ – параметры.

Запишем уравнение (8) в матричном виде для матриц $n \times n$, $n \in N$

$$W(z)' = AW(z)^2 + BW(z) + G \,, \tag{9}$$

где $W(z) = \{w_{i,j}(z)\}$ – искомая $n \times n$ матрица-решение, $A = \{\alpha_{i,j}\}, B = \{\beta_{i,j}\}, G = \{\gamma_{i,j}\}$ – $n \times n$ матрицы комплексных параметров.

Матричные уравнения Пенлеве существенно отличаются от скалярных и, по-существу, являются объектами нового типа, требующие отдельного изучения [8], [9]. Уравнение (8) в невырожденном случае в скалярной записи представляет собой систему из n^2 уравнений.

Исследуя матричное уравнение Риккати при помощи теста Пенлеве-Ковалевской на свойство Пенлеве, было установлено, что для матриц 2×2, для любых значений параметров *A, B, G* система уравнений (9) проходит тест Пенлеве-Ковалевской.

Второе матричное уравнение Пенлеве имеет вид

$$W(z)'' = 2W(z)^3 + zW(z) + A \,, \tag{10}$$

где $W(z) = \{w_{i,j}(z)\}$ – искомая $n \times n$ матрица-решение, $A = \{\alpha_{i,j}\}$ – $n \times n$ матрица комплексных параметров. Для матриц размера 2×2 не содержащих нулей необходимым условием на наличие свойства Пенлеве (а так же достаточным для прохождения теста Пенлеве-Ковалевской) является условие $A = \lambda E$, где E – единичная 2×2 матрица. Если искомая матрица $W(z)$ содержит нулевые элементы, тогда скалярные уравнения (10) проходят тест Пенлеве-Ковалевской при $A \neq 0$, только если ненулевые элементы содержатся лишь на главной диагонали.

Для второго матричного уравнения Пенлеве размера 3×3 индексы Фукса (номера коэффициентов в разложении решения в ряд Лорана при которых коэффициенты не определяются) равны -1 – кратности 2, 0 – кратности 6, 1 – кратности 1, 2 – кратности 1, 3 – кратности 6, 4 – кратности 2.

Матричные уравнения $({}_4\widetilde{P}_2)$ и $({}_4\widetilde{K}_2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &W(z)^{(4)} = 10W(z)^2 W(z)'' + 10W(z)(W(z)')^2 - 6W(z)^5 + zW(z) - \\ &- BW(z)'' - 2BW(z)^3 - 2GW(z) + A \end{aligned}, \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} &W(z)^{(4)} = 10W(z)^2 W(z)'' + 10W(z)(W(z)')^2 - 6W(z)^5 + zW(z) - \\ &- BW(z)'' - 2BW(z)^3 - 2GW(z) + A \end{aligned}, \qquad (12)$$

где $W(z) = \{w_{i,j}(z)\}$ – искомая $n \times n$ матрица-решение, $A = \{\alpha_{i,j}\}$, $B = \{\beta_{i,j}\}$, $G = \{\gamma_{i,j}\}$ – $n \times n$ матрицы комплексных параметров. Матричные уравнения $({}_4\widetilde{P}_2)$ и $({}_4\widetilde{K}_2)$ не проходят тест Пенлеве-Ковалевской, исключая случай, когда система уравнений (11) и (12) распадается на систему из двух независимых скалярных уравнений.

Литература

1. *Ablowitz M., Clarkson P.A.* Solitons, Nonlinear Evolutions Equations and Inverse Scattering // L.M.S. Lect.Notes Math, 149, C.U.P., Cambrige, 1991.
2. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M.* From Gauss to Painleve. A modern theory of special functions // Aspects of Mathematics E16. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.
3. *Valerii I. Gromak, Ilpo Laine, Shum Shimomura.* Painleve differential equations in the complex plane // Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2002.
4. *Kudryashov N.A*. Forth-order analogies to the Painlevy equations // J. Phys. A: Math.Gen. (2002), No. 35, 4617-4632.
5. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
6. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Киев: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1939.
7. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / Пер. с англ. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

8. *Баландин С.П.* Интегрируемость по Пенлеве систем нелинейных дифференциальных уравнений с приложениями к теории переноса: автореф. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Стерлимак 2004.
9. *Inozemtseva N.G., Sanovnikov B.I.* On exact solutions for somematrix equations // Regular and chaotic dynamics V.3,N 1,1988.

ЗАМКНУТЫЕ НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ГРАФОВ, ИХ ПРИВОДИМОСТЬ

О. В. Максимович

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой статье рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер, различаемые с точностью до изоморфизма.

Граф G называется *суперграфом* графа H, если H является индуцированным подграфом в G $(H \le G)$.

Определим две операции на множестве графов. Пусть G_1 и G_2 произвольные графы и $VG_1 \cap VG_2$ пусто. Граф G назовем *дизъюнктным объединением* графов G_1 и G_2, если $VG = VG_1 \cup VG_2$ и $EG = EG_1 \cup EG_2$. Граф G назовем *соединением* графов G_1 и G_2, если $VG = VG_1 \cup VG_2$ и множество его ребер состоит из ребер графов G_1, G_2 и всех ребер, один конец которых принадлежит VG_1, а другой – VG_2.

Пусть Γ это множество всех простых графов. Произвольное подмножество P множества Γ называется *теоретико-графовым свойством*. Граф G обладает свойством P, если $G \in P$. Свойство P называется *наследственным*, если для всех графов G из P истинна импликация $H \le G \Rightarrow H \in P$.

Будем говорить, что множество I графов *характеризует свойство P в терминах запрещенных индуцированных подграфов*, если $G \in P$ тогда и только тогда, когда ни один из индуцированных подграфов графа G не принадлежит множеству I. Широко известны следующие два факта:

Теорема 1.

1. *Наследственные свойства и только они могут быть в точности охарактеризованы в терминах запрещенных индуцированных подграфов.*

2. *Для данного наследственного свойства P минимальным множеством запрещенных индуцированных подграфов является множество графов G обладающих следующими свойствами:*

- $G \notin P$.
- *Любой индуцированный подграф графа G, отличный от него самого, обладает свойством P.*