МНОГООБРАЗИЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ МАТРИЦ

А. А. Литовко

Пусть F – алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим множество

$$C(m,n)=\left\{ \left(A_1,\ldots,A_n\right)\in M_n(F)^m \mid A_iA_j=A_jA_i,\ i,j=\overline{1,n} \right\}, \qquad (1)$$

где $m,n\geq 2$.

$C(m,n)$ является замкнутым в топологии Зарисского подмножеством A^{mn^2} и называется многообразием m перестановочных матриц порядка n. Естественными являются следующие вопросы: 1) является ли $C(m,n)$ неприводимым многообразием; 2) если $C(m,n)$ приводимо, то сколько оно имеет неприводимых компонент, и какова их размерность.

В [1] доказано, что $C(2,n)$ неприводимо и $\dim C(2,n)=n^2+n$. В [2] проведено первое систематическое исследование многообразий перестановочных матриц. В частности, доказано, что $C(m,2)$ и $C(m,3)$ неприводимые многообразия размерностей $2m+2$ и $3m+6$ соответственно. В этой же работе доказано, что $C(m,n)$ приводимо, если $m,n\geq 4$. В [3] доказано, что $C(3,n)$ приводимо при $n\geq 32$. Таким образом, вопрос о неприводимости $C(m,n)$ остается открытым лишь в случае, когда $m=3$, а $4\leq n\leq 31$. Отметим, что в случае приводимости $C(m,n)$ вопрос о числе неприводимых компонент и об их размерности также остается открытым.

В [2] Герстенхабер доказал, что если $C(m,n)$ неприводимо, то любая подалгебра $M_n(F)$, порожденная m перестановочными матрицами, имеет размерность не более n. Для доказательства приводимости $C(m,n)$ при $m,n\geq 4$ в [2] явно строится подалгебра $M_n(F)$, порожденная m перестановочными матрицами и имеющая размерность больше n. Поэтому естественно возникает еще один вопрос: какова максимальная размерность подалгебры $M_n(F)$, порожденной $m(m>2)$ перестановочными матрицами? В частности, существует ли подалгебра $M_n(F)$, порожденная тремя попарно перестановочными матрицами, размерности больше n?

В данной работе доказывается следующая теорема.

Теорема. Многообразие $C(3,n)$ приводимо при $n\geq 29$.

Доказательство теоремы использует методы, развитые Гуральником в [2], и, по существу, является модификацией доказательства Гуральника.

В начале напомним некоторые необходимые понятия и факты.

Матрица $A \in M_n(F)$ называется *регулярной*, если $\dim C(A) = n$, где $C(A)$ – централизатор матрицы A, и в этом случае

$$C(A) = \left\{ \alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_{n-1} A^{n-1} \mid \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in F \right\}. \qquad (2)$$

Множество всех регулярных матриц $U_{рег} \subset M_n(F)$ является открытым по Зарисскому подмножеством [4]. Определим морфизм

$$f : M_n(F) \times \mathbf{A}^{(m-1)\ n} \to C(m,n) \qquad (3)$$

по правилу

$$f(X, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m-1n}) = \left(X, \alpha_{11} E + \ldots + \alpha_{1n} X^{n-1}, \ldots, \alpha_{m-11} E + \ldots + \alpha_{m-1n} X^{n-1}\right).$$

В [2] доказано, что замыкание $\overline{\operatorname{Im} f} = W$ является неприводимой компонентой $C(m,n)$ и $dim\ W = n^2 + (m-1)\ n$. Кроме того, если $(A_1, \ldots, A_m) \in C(m,n)$, и хотя бы одна из матриц A_i регулярна, то $(A_1, \ldots, A_m) \in W$.

В случае $m = 3$ имеем $\dim W = n^2 + 2n$. Для доказательства теоремы нам достаточно найти в $C(3,n)$ замкнутое неприводимое подмножество $Z \neq W$ такое, что $\dim Z \geq n^2 + 2n$.

Для $A \in M_n(F)$ $C_2(A) = \left\{ (X,Y) \in C(A)^2 \mid X\ \ Y = Y\ \ X \right\}$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0_{s\times s} & E_{s\times s} & 0_{s\times t} & 0_{s\times s} \\ 0_{s\times s} & 0_{s\times s} & 0_{s\times t} & E_{s\times s} \\ 0_{t\times s} & 0_{t\times s} & 0_{t\times t} & 0_{t\times s} \\ 0_{s\times s} & 0_{s\times s} & 0_{s\times t} & 0_{s\times s} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где $E_{s\times s}$ – единичная матрица порядка s, $0_{s\times t}$ – нулевая матрица порядка $s \times t$.

Лемма.

1) $\dim C(A) = 3s^2 + 2st + t^2$.

2) $\dim C_2(A) = 3s^2 + 4st + 2$.

Доказательство. 1) Пусть $X \in C(A)$. Тогда непосредственное вычисление показывает, что

$$X=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 0 & X_1 & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & X_5 & X_6 \\ 0 & 0 & 0 & X_1 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $X_1, X_2, X_4 \in M_s(F)$, $X_5 \in M_t(F)$, $X_3 \in M_{s\times t}(F)$, $X_6 \in M_{t\times s}(F)$.

Поэтому $\dim C(A) = 3s^2 + 2s\ \ t + t^2$.

2) Пусть K – множество всех матриц $B \in C(A)$ вида

$$B=\alpha E+\begin{pmatrix} 0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $\alpha \in F$.

Ясно, что $\dim K = 2s^2 + 2s\ \ t + 1$. Так как условие, что две матрицы из K перестановочны, задается s^2 уравнениями, то
$\dim C_2(A) \geq \dim K^2 \cap C_2(A) \geq 2\left(2s^2 + 2st + 1\right) - s^2 = 3s^2 + 4st + 2$.

Доказательство теоремы. Пусть A – матрица, определенная в (4), $n = 3s + t + k,\ k \geq 0$. Определим морфизм

$$f : GL_n(F) \times C_2(A) \times A^{3k+1} \to C(3,n) \qquad (7)$$

по правилу

$$f\left(X, B, C, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k\right) = \left(XA_1X^{-1}, XB_1X^{-1}, XC_1X^{-1}\right),$$

где $A_1 = diag\left(\alpha_0 E + A, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\right)$, $B_1 = diag\left(B, \beta_1, \ldots, \beta_k\right)$, $C_1 = diag\left(C, \gamma_1, \ldots, \gamma_k\right)$.

Пусть $T = \operatorname{Im} f$. Найдем размерность T.

Пусть $\pi : T \to M_n(F)$ – проекция на первую координату, т. е. $\pi(X, Y, Z) = X$. Тогда $\pi(T) = \bigcup Cl(A_1)$, где $Cl(A_1)$ – класс сопряженности A_1, а объединение берется по всем $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$.

Определим морфизм $\varphi : F^{k+1} \times GL_n(F) \to \pi(T)$ по правилу $\varphi\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, U\right) = UA_1U^{-1}$. Очевидно, что φ сюръективное отображение. Если α_i попарно различны, то $\phi^{-1}(A_1) = \{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, U) \mid U \in C(A_1)\}$, и в силу леммы $dim\varphi^{-1}(A_1) = \dim C(A_1) = \dim\ C(A) + k = 3s^2 + 2st + t^2 + k$.

Если α_i не попарно различны, то $dim\,\varphi^{-1}(A_1)$ будет не меньше, чем в предыдущем случае. Таким образом, по теореме о размерности слоев морфизма [5, с. 55], получаем

$$\dim\pi(T)=n^2+k+1-\left(3s^2+2st+t^2+k\right)=n^2-3s^2-2st-t^2+1. \qquad (8)$$

Далее, для любой матрицы $XA_1X^{-1}\in\pi(T)$ слой $\pi^{-1}\left(XA_1X^{-1}\right)=\left\{\left(XA_1X^{-1},XB_1X^{-1},XC_1X^{-1}\right)\,|\,(B,C)\in C_2(A)\ \beta_i,\gamma_j\in F\right\}$.

Следовательно, в силу леммы размер прообраза любой матрицы из $\pi(T)$ равен

$$\dim\pi^{-1}\left(XA_1X^{-1}\right)=\dim C_2(A)+2k\geq 3s^2+4st+2+2k. \qquad (9)$$

В итоге получаем

$$\dim T=\dim\pi(T)+\dim\ \pi^{-1}(A_1)=\dim\pi(T)+\dim\ C_2(A_1)\geq$$

$$\geq n^2-3s^2-2st-t^2+1+3s^2+4st+2+2k=n^2-t^2+2st+2k+3. \qquad (10)$$

Пусть $Z=\overline{T}$, тогда

$$\dim Z=\dim T\geq n^2-t^2+2st+2k+3. \qquad (11)$$

Исследуем, при каких значениях s,t справедливо неравенство

$$\dim Z\geq n^2+2n. \qquad (12)$$

Имеем $n^2-t^2+2st+2k+3\geq n^2+6s+2t+2k$, откуда

$$-t^2+2st-6s-2t+3\geq 0. \qquad (13)$$

Непосредственная проверка показывает, что это неравенство выполняется при $s=8$, $t=5$. Так как $n=3s+t+k=29+k$, то мы получаем, что $C(3,n)$ приводимо при $n\geq 29$.

Теорема доказана.

Литература

1. *Motzkin T., Taussky O.* Pairs of matrices with property L. II // Trains. Amer. Math. Soc. 80 (1955). P. 387–401.
2. *Gerstenhaber M.* On dominance and varieties of commuting matrices // Annals of Math. 73 (1961). P. 324–348.
3. *Guralnick R.* A note on commuting pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra. 1992. Vol. 31. P. 71–75. Gordon and Breach Science Publishers S. A., 1992.
4. *Springer T., Steinberg R.* Conjugacy classes // Seminar in algebraic groups and related finite groups. (ed. A. Borel et al.), Lecture Notes in Math. 131. Springer-Verlag, 1970.
5. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии // Успехи математических наук. Том XXIV. Вып. 6 (150) , ноябрь-декабрь. М.: Наука, 1969.