

вее материал к температурному полю, т.е. при минимальном коэффициенте теплового расширения. При этом температура и толщина слоев не изменяются. Из зависимости термических перемещений слоев от их толщин, когда температура и коэффициенты теплового расширения материалов слоев постоянны, сделан вывод, что термические перемещения каждого отдельно взятого слоя не зависят от его толщины, что не противоречит принятым в ходе решения задачи предположениям. Зависимость термических перемещений слоев от коэффициента теплового расширения ауксетичного материала, из которого состоит верхний слой, когда температура, толщина слоев и коэффициент теплового расширения неауксетичного материала являются константами, демонстрирует то, что при определенных значениях коэффициента теплового расширения ауксетичного слоя возможно получение нулевых термических перемещений.

Таким образом, цель работы была успешно достигнута. Были получены условия, при которых возможно получение материала с нулевым коэффициентом теплового расширения. В процессе работы над решением данной проблемы возникли новые вопросы, поставлены новые цели, на достижение которых будет направлена наша дальнейшая деятельность.

Литература

1. *Pleskachevsky Yu. M., Shilko S. V., Stelmakh S. V.* // Journal of Wave – Material Interaction.–1999.– Vol. 14, № 1 – 2, p.49 – 58.
2. *Конек Д. А., Черноус Д. А., Бодрунов Н. Н.* // Материаловедение, технологии и экология на рубеже веков /Материалы Всерос. научн. конф.– Томск, 2000.– с.105 – 108.
3. *Шилько С. В.* // Трение и износ. – 1995. – Т. 15, № 3. – с.429 – 437.
4. *Конек Д. А., Войцеховски К. В., Плескачевский Ю. М., Шилько С. В.* Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. // Механика композиционных материалов и конструкций.– 2004.– том 10, №1 – с.35–69.
5. *Lakes R. S.* // Advanced Materials.– 1993.–Vol.5.– P.293–296.
6. *Черноус Д. А., Шилько С. В., Плескачевский Ю. М.* // Механика композитных материалов и конструкций. – 1998. –№3. – с.28 – 38.
7. *Плескачевский Ю. М., Шилько С. В.* Ауксетики: модели и приложения. // Вести НАНБ.– 2003.– №4 – с.58–68.

СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КУСОЧНО-СГЛАЖИВАЮЩИХСЯ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

К. В. Василевский

Дифференциально-операторные уравнения первого порядка с переменными областями определения кусочно сглаживающихся операторов

изучались в [1] в классе сильных решений. В данной работе такие дифференциально-операторные уравнения исследуются в классе слабых решений при несколько других предположениях и, в частности, при сопряженных вложениях областей определения соответствующих сопряженных операторов в точках разрывов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$ рассмотрим задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения:

$$\mathcal{L}(t)u \equiv \frac{du}{dt} + A(t)u = f, \quad t \in]0, T[, \quad (1)$$

с начальным условием

$$lu \equiv u(0) = u_0 \in H, \quad (2)$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H и $A(t)$, $t \in [0, T]$, – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$.

Предполагаем, что $A(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. Операторы $A(t)$ замкнуты в H и при каждом $t \in [0, T]$ выполняются неравенства:

$$[u]_{(t)}^2 \equiv \operatorname{Re}(A(t)u + c_0 u, u) \geq c_1 |u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad (3)$$

$$\langle v \rangle_{(t)}^2 \equiv \operatorname{Re}(A^*(t)v + c_0 v, v) \geq c_1 |v|^2 \quad \forall v \in D(A(t)), \quad c_0 \geq 0, \quad c_1 \geq 0, \quad (4)$$

где $A^*(t)$ – сопряженные операторы в H к операторам $A(t)$ и $D(A^*(t))$ – их области определения.

II. На каждом частичном интервале $I_i = [t_i, t_{i+1}[$, $i = \overline{0, m}$, разбиения $[0, T[= \bigcup_{i=0}^m I_i$, где $t_0 = 0$, $t_{m+1} = T$, существуют максимально диссипативные операторы $B(t)$ в H с зависящими от t областями определения $D(B(t))$ такие, что при почти всех $t \in]0, T[$ операторы $A^*(t)$ подчинены сопряженным операторам $B^*(t)$ операторов $B(t)$ с областями определения $D(B^*(t))$, т. е.

$$|A^*(t)v| \leq c_{2,i} |B^*(t)v| \quad \forall v \in D(B^*(t)), \quad c_{2,i} > 0, \quad i = \overline{0, m}.$$

При каждом $t \in I_i$ операторы $B(t)$ имеют ограниченные обратные $B^{-1}(t)$, у которых сопряженные операторы $(B^{-1}(t))^* \in L_\infty(I_i, \Lambda(H))$ сильно непрерывны по t в H и при почти всех $t \in I_i$ имеют ограниченную сильную производную $d(B^{-1}(t))^*/dt \in L_\infty(I_i, \Lambda(H))$ и пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(v, \frac{d(B_\varepsilon^{-1}(t))^*}{dt} B_\varepsilon^{-1}(t)v, v \right) dt = 0 \quad \forall v \in L_2(I_i, H_t^+), \quad (5)$$

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(A^*(t)(B_\varepsilon^{-1}(t))^* B_\varepsilon^{-1}(t)v, v \right) dt \leq c_{3,i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |v|^2 dt \quad \forall v \in L_2(I_i, H_t^+), \quad (6)$$

где $c_{3,i} \geq 0$ и $(B_\varepsilon^{-1}(t))^* = (I - \varepsilon B^*(t))^{-1}$ – сопряженные сглаживающие операторы к сглаживающим операторам $B_\varepsilon^{-1}(t) = (I - \varepsilon B(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$.

III. При всех $t \in I_i$ обратные $A^{-1}(t)$ операторов $A(t)$ сильно непрерывны по t в H , при почти всех $t \in I_i$ в H имеют сильную производную $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(I_i, \Lambda(H))$, $A(t)(dA^{-1}(t)/dt) \in L_\infty(I_i, \Lambda(H_t^+, H))$, $i = \overline{0, m-1}$, и в точках разрыва t_i операторов $B_\varepsilon^{-1}(t)$ справедливы вложения

$$D(B^*(t_i + 0)) \subset D(A^*(t_i - 0)), \quad i = \overline{1, m}.$$

Докажем корректность поставленной задачи Коши (1), (2) в классе слабых решений.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Сначала введем нужные пространства и дадим определение слабых решений задачи Коши (1), (2). Пусть H_t^- и H_t^{*-} – антидвойственные гильбертовы пространства к гильбертовым пространствам H_t^+ и H_t^{*+} , которые получаются замыканием множеств $D(A(t))$ и $D(A^*(t))$ по эрмитовым нормам $[\cdot]_{(t)}$ и $\langle \cdot \rangle_{(t)}$ из (3) и (4) соответственно. Обозначим пространства $\mathbf{H}^- = L_2([0, T[, H_t^-)$, $\mathbf{H} = L_2([0, T[, H)$, $\mathbf{H}^{*-} = L_2([0, T[, H_t^{*-})$.

Определение 1. Функция $u \in \mathbf{H}$ называется *слабым решением* задачи Коши (1), (2) для $f \in \mathbf{H}^{*-}$ и $u_0 \in H$, если имеет место тождество

$$\int_0^T \left\{ (u(t), A^*(t)\varphi(t)) - \left(u(t), \frac{d\varphi}{dt} \right) \right\} dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{(t)} dt + (u_0, \varphi(0))$$

для всех $\varphi \in \Phi = \{ \varphi \in H: \varphi(t) \in D(A^*(t)), t \in [0, T]; \text{ слабая производная } d\varphi/dt, A^*(t)\varphi \in H, \varphi(T) = 0 \}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(t)}$ – полуторалинейные формы антидвойственности между H_t^{*+} и H_t^{*-} .

Верны следующие теоремы существования и единственности решений.

Теорема 1. Если выполняется условие I, то для каждого $f \in H^{*-}$ и $u_0 \in H$ существует слабое решение $u \in H$ задачи Коши (1), (2).

Доказательство состоит в применении проекционной теоремы из [2]

в пространствах F с нормой $|||j||| = \left(\int_0^T \langle j(t), j(t) \rangle_{(t)} dt + |j(0)|_{H_0}^2 \right)^{1/2}$ и

$F = H$ к форме $E(u, j) = \int_0^T e^{2c_0 t} \left\{ (u(t), A^*(t)j(t)) - \left(u(t), \frac{dj}{dt} \right) \right\} dt$ и

функционалу $L(j) = \int_0^T \langle f(t), j(t) \rangle_{(t)} dt + (u_0, j(0))$.

Теорема 2. Если выполняются условия I – III, то для каждого $f \in H^{*-}$ и $u_0 \in H$ слабое решение $u \in H$ задачи Коши (1), (2) единственно.

Доказательство. Пусть $u \in H$ – слабое решение задачи Коши (1), (2) при $f = 0$ и $u_0 = 0$. Тогда справедливо тождество

$$\int_0^T \left\{ (u(t), A^*(t)j(t)) - \left(u(t), \frac{dj}{dt} \right) \right\} dt = 0 \quad \forall j \in F. \quad (7)$$

Докажем, что $u = 0$ в H . Для этого достаточно показать, что $u = 0$ при почти всех t на каждом интервале $I_i, i = \overline{0, m}$. Сначала убедимся в том, что $u = 0$ почти всюду на $I_0 = [0, t_1]$. В тождестве (7) можно положить $j = (B_e^{-1}(t))^* h$ для $h, dh/dt \in H, h(t) = 0 \quad \forall t \in I_1$. Из условия II вытекает, что $j \in F$. В результате этой подстановки получаем равенство

$$\int_0^{t_1} \left(B_e^{-1}(t)u(t), \frac{dh}{dt} \right) dt = \int_0^{t_1} \left(u(t), A^*(t)(B_e^{-1}(t))^* h \right) dt - \int_0^{t_1} \left(u(t), \frac{d(B_e^{-1}(t))^* h}{dt} \right) dt. \quad (8)$$

В нем интегрируем по t один раз по частям, его распространяем предельным переходом на $h \in H$, полагаем $h = e^{c(T-t)} B_e^{-1}(t)u$, берем удвоенную вещественную часть и имеем неравенство

$$\begin{aligned}
& c \int_0^{t_1} e^{c(T-t)} |B_e^{-1}(t)u|^2 dt - 2 \operatorname{Re} \int_0^{t_1} (u(t), A^*(t)(B_e^{-1}(t))^* B_e^{-1}(t)u) dt + \\
& + 2 \operatorname{Re} \int_0^{t_1} e^{c(T-t)} u, \frac{d(B_e^{-1}(t))^*}{dt} B_e^{-1}(t)u dt.
\end{aligned} \quad (9)$$

В неравенстве (9) переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и ввиду предположений (5), (6) приходим к оценке $(c - c_{3,0}) \int_0^{t_1} e^{c(T-t)} |u|^2 dt \leq 0$. Отсюда при $c > c_{3,0}$ следует, что $u = 0$ почти всюду на I_0 .

Теперь убеждаемся в том, что $u = 0$ почти всюду на $[t_1, t_2]$. Для этого в тождестве (7) полагаем

$$j(t) = \begin{cases} \mathbb{S}_0(t), & t \in [0, t_1[, \\ (B_e^{-1}(t))^* h, & t \in [t_1, t_2[, \\ 0, & t \in]t_2, \end{cases} \quad (10)$$

где h — любые функции из $\mathbf{H}$, для которых $dh/dt \in L_2([t_1, t_2], H)$, $h(t) = 0$ при $t_1 < t \leq t_2$, а $\mathbb{S}_0(t)$ — решение обратной задачи Коши:

$$\frac{d\mathbb{S}_0(t)}{dt} - A^*(t)\mathbb{S}_0(t) = 0, \quad 0 < t < t_1; \quad \mathbb{S}_0(t_1) = (B_e^{-1}(t_1 + 0))^* h(t_1).$$

В силу условия III принадлежность функций $\mathbb{S}_0(t)$ множеству гладких решений доказывается с помощью теоремы гладкости из [1]. Таким образом, после подстановки функций j , определяемых формулой (10) в (7), получим равенство вида (8) с интегралами по $[t_1, t_2]$ вместо $[0, t_1]$. Далее теми же рассуждениями доказывается, что $u = 0$ почти всюду на $[t_1, t_2]$. Аналогично показывается, что $u = 0$ на каждом $I_i = [t_i, t_{i+1}[$, $i = \overline{2, m}$.

Литература

1. Ломовцев Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №7. С. 1132-1141.
2. Lions J. — L. Equations differentielles operationnelles et problems aux limites. Berlin: Springer. 1961. 292 p.