Теперь начнем строить независимое множество максимального веса с пустого множества. Выбирая каждый следующий элемент x_k жадным алгоритмом, нам необходимо будет только проверить, чтобы указатель на k-ой позиции характеристического вектора значения функции f на построенном ранее множестве $\{a_1,a_2,...,a_l\}$ был ненулевым. Если указатель нулевой, мы пытаемся выбрать следующий элемент из X, иначе мы добавляем новый элемент x_k к множеству $\{a_1,a_2,...,a_l\}$ и переходим по соответствующей ссылке. Очевидно, что для выяснения, является ли множество $\{a_1,a_2,...,a_l,x_k\}$ независимым, нам необходимо время O(1). Таким образом трудоемкость жадного алгоритма составит O(n) при затратах памяти O(mn). Время, необходимое для построения приведенной структуры данных из списка баз матроида при использовании хеш-таблицы для хранения характеристических векторов, пропорционально O(mn). Поэтому использование данной структуры данных целесообразно, если необходимо решить несколько оптимизационных задач на одной и той же матроидной структуре с различными весовыми функциями. В этом случае время решения k задач составит O((m+k)n).

Литература

1. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов / М. Наука 1990.
2. Ловас Л., Пламмер М., Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / Пер. с англ. М. Мир 1998.

ИНВАРИАНТНЫЕ РИМАНОВЫ МЕТРИКИ И КАНОНИЧЕСКИЕ *f*-СТРУКТУРЫ НА ФЛАГОВОМ МНОГООБРАЗИИ SO(*n*)/SO(2)×SO(*n*-3)

А. С. Сакович

Многообразие ориентированных флагов $SO(n)/SO(2)\times SO(n-3)$ ($n\geq 4$) представляет собой однородное Φ-пространство [1], которое может быть порождено автоморфизмами любого четного порядка $k\geq 4$. Поэтому, согласно результатам работы [2], на нем существует определенный запас канонических f-структур. Более того, оказывается, что все инвариантные римановы метрики на этом многообразии с точностью до положительного множителя определяются парой положительных действительных чисел (s,t). В данной работе мы дадим ответ на следующий вопрос: при каких условиях каноническая метрическая f-структура на однородном Φ-пространстве $SO(n)/SO(2)\times SO(n-3)$ порядка $k=6$

принадлежит классам $\mathbf{G_1f}$, $\mathbf{NKf}$ и $\mathbf{Kill\,f}$ обобщенной эрмитовой геометрии.

f-СТРУКТУРЫ И ИХ КЛАССЫ

Пусть M – связное гладкое многообразие, $\mathrm{X}(M)$ – алгебра Ли гладких векторных полей на M. Напомним, что аффинорной структурой на M называется гладкое тензорное поле типа (1,1). Особо отметим следующие аффинорные структуры классического типа: почти комплексную структуру ($J^2 = -1$) и f-структуру ($f^3 + f = 0$).

Как известно, почти эрмитовой структурой на многообразии M называется пара тензоров (J, g), где J – почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ – (псевдо-)риманова метрика, причем $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$ для любых векторных полей X и Y на M. Из 16 классов почти эрмитовых структур, указанных в работе [3], приведем следующие (с соотношениями, которые их определяют):

- келеровы структуры ($\mathbf{K}$): $\nabla J = 0$,
- приближенно келеровы структуры ($\mathbf{NK}$): $\nabla_X(J)X = 0$,
- G_1-структуры ($\mathbf{G_1}$): $\nabla_X(J)X - \nabla_{JX}(J)(JX) = 0$.

Здесь ∇ – связность Леви-Чивита (псевдо-)риманова многообразия M.

В обобщенной эрмитовой геометрии (см. [4]) центральным объектом является метрическая f-структура – пара (f, g), где f – f-структура, согласованная с (псевдо)римановой метрикой $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ следующим образом: $\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0$ для любых гладких векторных полей X и Y на M. Очевидно, это понятие является обобщением приведенного выше определения почти эрмитовой структуры.

Некоторые классы обобщенной эрмитовой геометрии выделяются на основании свойств присоединенной Q-алгебры – модуля $\mathrm{X}(M)$ с операцией $*$, определенной по формуле $X * Y = T(X, Y)$, где T – тензор типа (2,1), называемый композиционным (см. [4]). В [4] также было показано, что на метрическом f-многообразии такой тензор всегда существует, причем его можно задать в явном виде:

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f(\nabla_{fX}(f)(fY) - \nabla_{f^2X}(f)(f^2Y)).$$

Антикоммутативность Q-алгебры ($T(X, X) = 0$) определяет класс $G_1 f$-структур, который обозначается как $\mathbf{G_1f}$. Легко видеть, что в частном случае $f = J$ определение $G_1 f$-структуры совпадает с определением G_1-структуры. Отметим также классы киллинговых f-структур ($\mathbf{Kill\,f}$) [5] и приближенно келеровых f-структур или NKf-структур ($\mathbf{NKf}$) [6]. Они определяются соотношениями $\nabla_X(f)X = 0$ и $\nabla_{fX}(f)fX = 0$ соответственно. Нетрудно убедиться в том, что при $f = J$ эти классы совпадают с классом $\mathbf{NK}$, а также в том, что имеют место следующие включения: $\mathbf{Kill\,f} \subset \mathbf{NKf} \subset \mathbf{G_1 f}$.

Перейдем к инвариантным f-структурам на однородных пространствах. Как известно, однородные регулярные Φ-пространства обладают большим запасом канонических аффинорных структур, в том числе и f-структур [2].

Введем обозначение

$$u = \begin{cases} n, & k = 2n+1, \\ n-1, & k = 2n. \end{cases}$$

Теорема 1 [2]. Пусть G/H – однородное Φ-пространство порядка k ($k \geq 3$). Все нетривиальные канонические f-структуры на G/H могут быть заданы операторами

$$f = \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{u}\left(\sum_{j=1}^{u}\xi_j \sin\frac{2\pi mj}{k}\right)\left(\theta^m - \theta^{k-m}\right),$$

где $\xi_j \in \{1,0,-1\}$, $j = 1,2,\ldots,u$, причем среди чисел ξ_j есть отличные от нуля.

Детализируем этот результат для автоморфизма порядка $k = 6$.

Следствие 1. На однородном Φ-пространстве порядка 6 существуют (с точностью до знака) следующие канонические f-структуры

$$f_1(\theta) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^5),$$

$$f_2(\theta) = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}(\theta - \theta^2 + \theta^4 - \theta^5),$$

$$f_3(\theta) = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}(\theta + \theta^2 - \theta^4 - \theta^5),$$

$$f_4(\theta) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta^4).$$

МНОГООБРАЗИЕ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ФЛАГОВ SO(*n*)/SO(2)×SO(*n*-3)

Напомним, что $(G/H,g)$ называется естественно редуктивным, если для всех $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$ выполняется $g([X,Y]_{\mathfrak{m}},Z)=g(X,[Y,Z]_{\mathfrak{m}})$, где индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию на $\mathfrak{m}$ относительно редуктивного разложения. Если G – полупростая группа Ли и G/H является регулярным Φ-пространством, то на нем существует [1] естественно редуктивная псевдориманова метрика, порождаемая формой Киллинга, которую далее будем обозначать через g_0.

Рассмотрим $SO(n)/SO(2)\times SO(n-3)$ как однородное Φ-пространство порядка 6, порожденное внутренним автоморфизмом $\Phi: A\to BAB^{-1}$, где

$$B=\operatorname{diag}\left\{1,\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\underbrace{-1,\dots,-1}_{n-3}\right\}.$$

Можно показать, что его каноническое редуктивное дополнение $\mathfrak{m}$ допускает разложение в прямую сумму $Ad(H)$-инвариантных неприводимых слагаемых $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2\oplus\mathfrak{m}_3$, причем разложение $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2\oplus\mathfrak{m}_3$ является g_0-ортогональным. Отсюда следует, что любая инвариантная риманова метрика g на $SO(n)/SO(2)\times SO(n-3)$ (с точностью до положительного множителя) однозначно определяется парой положительных действительных чисел (s,t) в том смысле, что $g=g_0|_{\mathfrak{m}_1}+sg_0|_{\mathfrak{m}_2}+tg_0|_{\mathfrak{m}_3}$. Будем называть пару (s,t) характеристическими числами метрики.

Согласно следствию 1, на данном однородном Φ-пространстве порядка 6 существует канонические f-структуры f_1, f_2, f_3, f_4. Можно проверить, что все они согласованы с любой инвариантной римановой метрикой.

Сформулируем полученный результат в приведенных выше обозначениях.

Теорема 2. Пусть $SO(n)/SO(2)\times SO(n-3)$ – однородное Φ-пространство порядка 6, (s,t) – характеристические числа инвариантной римановой метрики. Тогда

1. f_1 является киллинговой f-структурой тогда и только тогда, когда $s=1$, $t=\frac{4}{3}$; f_2, f_3, f_4 не принадлежат классу **Kill f** ни при каких s и t.

2. f_1 является NKf -структурой тогда и только тогда, когда $s = 1$; f_2 и f_3 являются приближенно келеровыми для всех s и t; f_4 не является NKf -структурой ни для каких s и t.

3. f_1, f_2, f_3, f_4 являются $G_1 f$ -структурами для любых s и t.

Литература

1. *Степанов Н. А.* Основные факты теории φ-пространств // Изв. ВУЗов. Математика. 1967. № 3. С. 88–95.
2. *Балащенко В. В., Степанов Н. А*. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Мат. сборник. 1995. Т. 186. № 11. С. 3–34.
3. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1980. V. 123. № 4. P. 35–58.
4. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 25–71.
5. *Грицанс А. С.* Геометрия киллинговых *f*-многообразий // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. № 4. С. 149–150.
6. *Балащенко В. В.* Однородные приближенно келеровы *f*-многообразия // Доклады РАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 439–441.