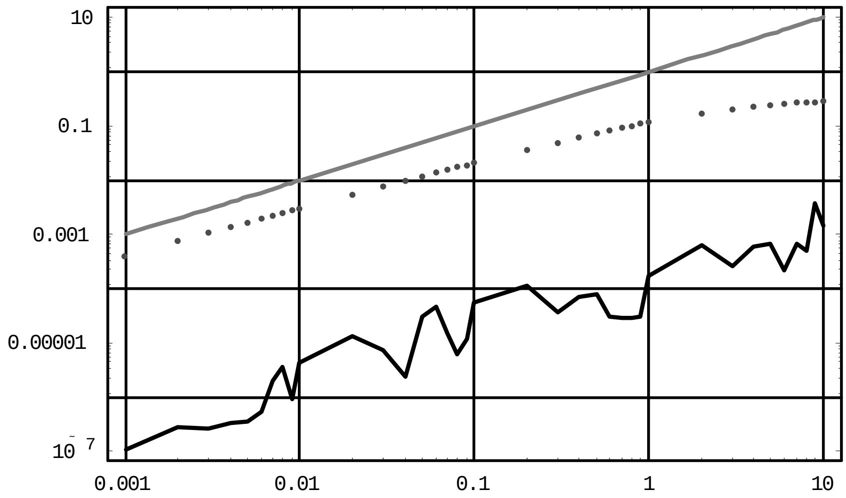

Рис. 2. Управление шагом по формуле (4) для неявного метода Эйлера. Логарифмическая шкала

Литература

1. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999.
2. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С «ДЛИННОЙ ПАМЯТЬЮ»

А. Н. Ярмола

В математической статистике часто приходится иметь дело с дискретными данными, поэтому актуальной является проблема разработки и исследования вероятностных моделей, которые позволяют адекватно описывать дискретные наблюдения, в частности, моделей дискретных временных рядов (ДВР). В настоящее время модели ДВР используются в генетике, экономике, защите информации и других приложениях [1]. Одной из удобных моделей является модель цепи Маркова с дискретным временем. Однако, поскольку число параметров цепи Маркова с ростом ее порядка («глубины памяти») растет экспоненциально, то использование на практике цепей Маркова высокого порядка становится малоэффективным. Для преодоления этого недостатка был разработан и исследован ряд «малопараметрических» моделей ДВР с «длинной памятью» [2–5]. Большинство работ, в которых рассматриваются такие модели, посвящены в основном практическому применению этих моделей. В данном докладе для одной из таких наиболее широко применяемых моделей – MTD-модели [2] – исследуются вероятностные свойства, а также предлагается метод статистического оценивания ее параметров.

Пусть $\{x_t \in A\colon t \in \mathbf{N}\}$ – однородная цепь Маркова s-ого порядка, $A=\{0,\dots,N\text{-}1\}$, с $(s+1)$-мерной матрицей вероятностей переходов $\mathrm{P}=(p_{i_0,\dots,i_s})$, $p_{i_0,\dots,i_s}=\mathrm{P}\{x_t=i_s \mid x_{t-1}=i_{s-1},\dots,x_{t-s}=i_0\}$, $i_0,\dots,i_s\in A$, $t\in\mathbf{N}$. Предложенная А. Рафтери [2] MTD-модель, задает специальный вид матрицы P:

$$P=P(\lambda,Q),\ p_{i_0,\dots,i_s}=\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_j q_{i_j i_s}\,, \tag{1}$$

где $Q=(q_{ik})$ – стохастическая $(N\times N)$-матрица; $\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_{s-1})$ – s-вектор вероятностей, $\lambda_0>0$, $\lambda_j\geq 0$, $j=1,\dots,s\text{-}1$, $\lambda_0+\dots+\lambda_{s-1}=1$. Важным обобщением MTD-модели является MTDg-модель, в которой для каждого j-ого из s прошлых моментов времени используется «своя» матрица вероятностей переходов $Q^{(j)}=(q_{ik}^{(j)})$ [2]:

$$p_{i_0,\dots,i_s}=\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_j q^{(j)}_{i_j i_s}\ . \ (2)$$

Исследуем вероятностные свойства MTD, MTDg-моделей. Обозначим случайный s-вектор $X_t=(x_{t-(s-1)},\dots,x_t)'$; последовательность $\{X_t\colon t>s\}$ является цепью Маркова первого порядка с матрицей переходов $P_X=(p^X_{ik})$, $i,k\in A^s$:

$$p^X_{ik}=\begin{cases} p_{i_0,\dots,i_{s-1},k_{s-1}}, & k_0=i_1,\dots,k_{s-2}=i_{s-1},\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases} \tag{3}$$

где $i=i_0N^{s-1}+\dots+i_{s-2}N+i_{s-1}$ – N-ичное представление числа i.

Лемма 1. *Если $Q^{(0)}$ – эргодическая [6], то для MTDg-модели матрица P_X – эргодическая.*

Лемма 2. *Для MTD-модели матрица P_X – эргодическая, тогда и только тогда, когда Q – эргодическая [6].*

Теорема 1. *Если $\{x_t\}$ – ДВР, соответствующий MTDg-модели, то его одномерные распределения вероятностей $\{\pi^{(t)}\}$, $\pi^{(t)}=(\pi_0^{(t)},\dots,\pi_{N-1}^{(t)})'$, $\pi_i^{(t)}=\mathrm{P}\{x_t=i\}$, $i\in A$ связаны линейным соотношением:*

$$\pi^{(t)}=\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_j (Q^{(j)})'\pi^{(t-s+j)},\ t\geq s. \tag{4}$$

Теорема 2 (Обратная). *Если для одномерных распределений цепи Маркова s-ого порядка* $\{x_t\}$ *имеют место линейные соотношения:*

$$\pi^{(t)} = \sum_{j=0}^{s-1}(B^{(j)})'\pi^{(t-s+j)},\ t\geq s,\ B^{(j)} = (b_{ik}^{(j)}),\ b_{ik}^{(j)} \geq 0,\ i,k \in A, j=0,\ldots,s\text{-}1, \quad (5)$$

то существуют s-вектор λ *и стохастические* $(N\times N)$*-матрицы* $\{Q^{(j)}\}$ *такие, что для вероятностей переходов выполнено (2).*

Теорема 3. *Для MTDg-модели распределение вероятностей* $\Pi^{(t)}=\left(\pi^{(t)}_{i_1,\ldots,i_s}\right)$, $\pi^{(t)}_{i_1,\ldots,i_s} = \mathrm{P}\{x_{t-(s-1)} = i_1,\ldots,x_t = i_s\}$, *имеет вид:*

$$\pi^{(t)}_{i_1,\ldots,i_s} = \prod_{l=0}^{s-1}\left(\sum_{j=l+1}^{s-1}\lambda_{s-j_l}q^{(s-j_l)}_{i_{j-l}i_{s-l}} + \sum_{j=0}^{l}\lambda_j\sum_{r=0}^{N-1}q^{(j)}_{ri_{s-l}}\pi_r^{(t-l-s+j)}\right),\ t\geq 2s. \quad (6)$$

Следствие 1. *Если выполнены условия Леммы 2, то для стационарных двумерных маргинальных распределений* $\Pi^*(m)=\left(\pi^*_{ki}(m)\right)$ *векторов* $(x_{t-m},x_t)'$, $1\leq m\leq s$, *справедливо линейное соотношение:*

$$\pi^*_{ki}(m) = \pi^*_k\pi^*_i + \pi^*_k\lambda_{s-m}\left(q_{ki} - \pi^*_i\right),\ k,i \in A. \quad (7)$$

Рассмотрим задачу статистического оценивания параметров MTD-модели (1). Пусть наблюдается реализация $X=(x_1,\ldots,x_T)$ длительности T ДВР, соответствующего MTD-модели. Построим оценки параметров, основанные на свойстве стационарных распределений (7). Определим статистики:

$$\hat{\pi}_{ki}(j) = \frac{1}{T-2s+1}\sum_{t=s+j+1}^{T-s+j+1}\mathrm{I}_k(x_{t-j})\mathrm{I}_i(x_t),\ i,k \in A, j=1,\ldots,s; \quad (8)$$

$$\hat{\pi}_i = \frac{1}{T-2s+1}\sum_{t=s+1}^{T-s+1}\mathrm{I}_i(x_t),\ i \in A, \quad (9)$$

где $\mathrm{I}_a(b)=\{1$, если $a=b$; 0, если $a\neq b\}$ – индикаторная функция. Подставляя данные статистики в (7) и решая получающиеся при этом уравнения относительно $\{q_{ki}: i, k \in A\}$, находим оценки:

$$\hat{q}_{ki} = \begin{cases}\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ki}(j)/\hat{\pi}_k - (s-1)\hat{\pi}_i, & \hat{\pi}_k > 0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что Матрица $\hat{Q}=(\hat{q}_{ki})$, i, $k \in A$, определенная согласно (9), – стохастическая. Оценку для вектора λ построим на основе (9) по методу наименьших квадратов:

$$\hat{\lambda}=\arg\min_{\lambda}\sum_{i,k\in A}\sum_{j=0}^{s-1}\left(\hat{\pi}_{ki}(j)/\hat{\pi}_k-\hat{\pi}_i-\lambda_j(\hat{q}_{ki}-\hat{\pi})\right)^2. \qquad (11)$$

Теорема 4. *Если выполнены условия Леммы 2, то при $T\to\infty$ статистики (9), (11) являются асимптотически несмещенными и состоятельными оценками для Q и λ, соответственно.*

К сожалению, использование аналогичного метода построения оценок в случае MTDg-модели не возможно. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Для MTDg-модели при $m<s$ либо не существует набора параметров $\{\lambda,Q^{(0)},\ldots,Q^{(s-1)}\}$ такого, что для любых фиксированных $1\le j_1<\ldots<j_m\le s$ стационарное распределение вероятностей случайного вектора $(x_t,x_{t-j_1},\ldots,x_{t-j_m})'$ совпадает с заданным распределениям $\Pi^*(j_1,\ldots,j_m)$, либо такой набор параметров неединственный.*

Лемма 3. *Пусть наблюдается реализация $X=(x_1,\ldots,x_T)$ длительности T ДВР, соответствующего MTD-модели. Тогда логарифмическая функция правдоподобия (ЛФП) параметров λ, Q имеет вид:*

$$l(\lambda,Q)=\sum_{t=s}^{T}\ln\left(\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_j q_{x_{t-s+j}x_t}\right). \qquad (12)$$

Задача вычисления ОМП состоит в отыскании точки максимума ЛФП (12) при ограничениях на параметры модели. Данная задача не разрешима аналитически в виду нелинейности ЛФП, поэтому для практического вычисления ОМП в [7] предложен итерационный алгоритм вычисления ОМП. Однако, предложенные там же [7] начальные значения не являются состоятельными оценками и ухудшают работу алгоритма, т.к. с увеличением T число итераций алгоритма, необходимых для достижения результата, не уменьшается и не гарантируется сходимость итерационного процесса к ОМП. Поэтому оценки (9), (11) целесообразно использовать в качестве более точных начальных значений итерационного алгоритма.

Пусть: $\psi=(q_{0,0},\ldots,q_{0,N-2},q_{1,0},\ldots,q_{N-1,N-2},\lambda_0,\ldots,\lambda_{s-2})'$ – вектор-столбец независимых параметров MTD-модели; $\tilde{l}(\psi)=l(\lambda,Q)/(T-s)$.

Теорема 6. *Пусть имеет место MTD-модель, для вариации ОМП $\overline{\psi}$, вычисленной по реализации X длительности T, справедливо асимптотическое разложение:*

$$E\{\| \psi - \overline{\psi} \|^2\} = c/(T-s) + O(T^{-2}), \qquad (13)$$

где $0 \le c \le 1/(\lambda_{\min}(1-\lambda_{\min})q_{\min}^2)$, q_{min}, λ_{min} – минимальные положительные элементы матрицы Q и вектора λ, соответственно.

Литература

1. *Berchtold A., Raftery A. E.* The Mixture Transition Distribution Model for High-oder Markov Chains and Non-Gausian Time SeriesModel // Statistical Science, Vol. 17, No 3, 2002, P. 328–356.
2. *Raftery A. E.* A model for high-order Markov chains // J. R. Statist. Soc. 1985, Vol. 47. No. 3. p. 528–539.
3. *Харин Ю. С.* Цепи Маркова с *r*-частичными связями и их статистическое оценивание // Доклады НАН Беларуси, 2004. т. 48. № 1. С. 40–41.
4. *Харин Ю. С., Ярмола А. Н.* О статистическом анализе одной модели дискретной авторегрессии DAR(*s*) // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер.1. 2004. № 3. С. 65–69.
5. *Jacobs P. A., Lewis P. A. W.* Discrete time series generated by mixtures // J. R. Statist. Soc. 1978, No. 1,2. p. 92–105, 222–229.
6. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
7. *Berchtold A.*, Estimation of the Mixture Transition Distribution Model // J. of Time Ser. Anal. 2001. Vol. 22, No. 4. p. 379–397.