

Утверждение 2. Пусть

$$\begin{cases} \alpha = v_1 - d_1 - \frac{hrp_0}{mq_0} > 0, \\ \beta = \frac{rp_0}{mq_0} > 0, \\ \lambda = -\frac{m(gp''r + mq_0(V_0 - D_0))}{gp''}, \end{cases}$$

и для экономической модели, описываемой системой (7), выполняются неравенства

$$\begin{cases} v_1 - d_1 + m > 0, \\ \alpha m - \beta g > 0, \\ (v_0 + d_0 - r) = -g\beta. \end{cases}$$

Тогда равновесные цена и объем продаж будут устойчивы при $\lambda = 0$ и неустойчивы в противном случае.

Литература

1. Калитин Б. С. Модель второго порядка монопольного рынка // Экономика. Управление. Право. 2004. № 2. С. 68–70.
2. Калитин Б. С. Устойчивость равновесия экономических моделей. Мн, БГУ 1997.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Л.: Гостехиздат, 1950.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: 1996.

УПРАВЛЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КОНТРАКТИВНЫХ ЗАДАЧ

Б. В. Фалейчик

Пусть дана задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u' = f(x, u), u(x_0) = u_0, \quad (1)$$

и необходимо вычислить значение $u(X)$, $x_0 < X$, с абсолютной погрешностью, по норме (напр., евклидовой) не превышающей E . Предположим также, что задача контрактивна, то есть «расстояние» между любыми двумя решениями системы уравнений из (1) является невозрастающей функцией от x (см. [1, сс. 193, 208]). Рассмотрим один из возможных вариантов решения этой задачи, основанный на использовании одношаговых методов и правила Рунге оценки локальной погрешности.

Возьмем произвольный одношаговый метод порядка p . Введем следующие обозначения: y_i – значение приближенного решения, полученное этим методом в узле $x_i \in \{x_0, x_1, \dots, x_N = X\}$; $h_i = x_{i+1} - x_i$; e_i , ε_i – нормы соответственно локальной и глобальной погрешностей в точке x_i

(или их оценки); $E_i = \sum_{j=1}^i e_j$. В силу контрактивности глобальная погреш-

ность в точке x_i по норме не превышает суммы локальных. Это предоставляет возможность лишь апостериорной оценки глобальной погрешности в точке X . Наша же задача состоит в таком выборе длин шагов h_i , который автоматически обеспечил бы выполнение условия

$$E_N \leq E. \quad (2)$$

Если для практической оценки локальной погрешности использовать правило Рунге, эту задачу можно решать следующим образом. Предположим, что найдено значение y_i в точке $x_i < X$ и известна оценка накопленной локальной погрешности E_i , $E_i < E$. Оптимальная длина шага h_{i+1} напрямую связана с величиной локальной ошибки e_{i+1} , которую мы можем позволить себе допустить.

Будем исходить из известной зависимости

$$e_{i+1} \leq C_{i+1} h^{p+1}, \quad (3)$$

где p – порядок метода, а C_{i+1} – некоторая константа [см., напр., 2, с. 167]. Ее значение может быть оценено стандартным «двойным пересчетом» по правилу Рунге.

С другой стороны, для того, чтобы обеспечить выполнение требования (2), локальную погрешность разумно ограничить следующим образом:

$$e_{i+1} \leq h \frac{E - E_i}{X - x_i}. \quad (3)$$

Смысл этой оценки интуитивно понятен: «остаток» глобальной погрешности, равный $E - E_i$, равномерно распределяется по отрезку $[x_i, X]$. Для нахождения значения $h = h_{i+1}$, удовлетворяющего условиям (2) и (3), можно приравнять правые части этих неравенств:

$$C_{i+1} h^{p+1} = h \frac{E - E_i}{X - x_i}.$$

Отсюда получаем практическое правило выбора следующего шага:

$$h_{i+1} = \left(\frac{E - E_i}{C_{i+1}(X - x_i)} \right)^{1/p}. \quad (4)$$

Экспериментальный анализ описанного механизма управления длиной шага проводился на примере линейной задачи

$$u' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X = 3. \quad (5)$$

Матрица A этой системы отрицательно определена, следовательно, задача (5) контрактивна (см. [1, с. 194]). Для ее решения использовались классический явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка и неявный метод Эйлера. На рисунках 1, 2 приведены графики зависимости евклидовой нормы реальной глобальной погрешности ε_N от E (черная ломаная) для этих методов. Точками отмечены значения E_N – суммы оценок локальных погрешностей, график прямой $\varepsilon_N(E) = E$ обозначен серой линией.

На основании экспериментов можно сделать следующие выводы. Применение предложенного способа выбора длины шага дает хорошие результаты при использовании явного метода Рунге-Кутты (см. рис. 1). При использовании же неявного метода Эйлера, во первых, получаемая в итоге глобальная погрешность оказывается значительно меньше, чем требуемая (см. рис. 2), и, во-вторых, вычислительные затраты очень велики. Объяснить это можно тем, что, так как неявный метод Эйлера A -устойчив, то требование (2) для него является излишне завышенным, а ввиду низкого порядка метода для выполнения этого требования приходится брать слишком малый шаг.

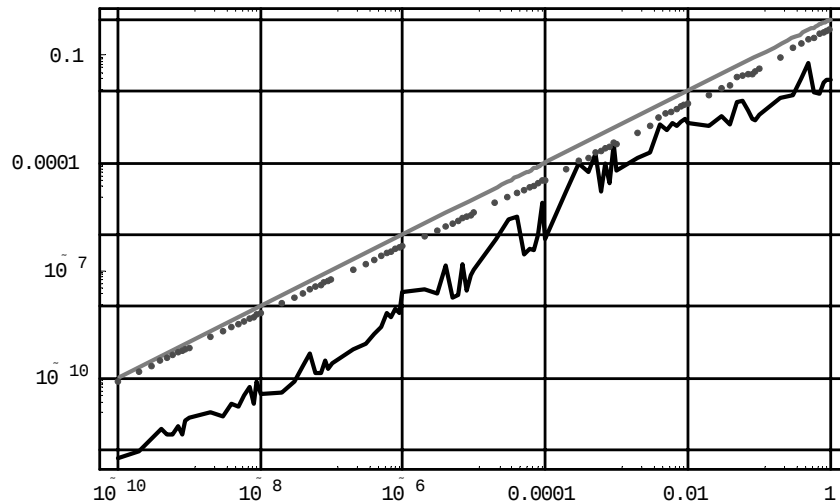


Рис. 1. Управление шагом по формуле (4) для явного метода Рунге-Кутты. Логарифмическая шкала

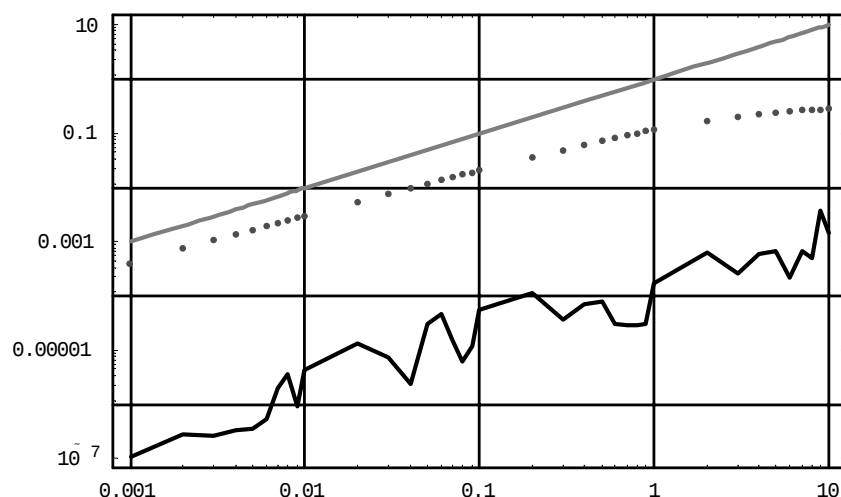


Рис. 2. Управление шагом по формуле (4) для неявного метода Эйлера. Логарифмическая шкала

Литература

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С «ДЛИННОЙ ПАМЯТЬЮ»

А. Н. Ярмола

В математической статистике часто приходится иметь дело с дискретными данными, поэтому актуальной является проблема разработки и исследования вероятностных моделей, которые позволяют адекватно описывать дискретные наблюдения, в частности, моделей дискретных временных рядов (ДВР). В настоящее время модели ДВР используются в генетике, экономике, защите информации и других приложениях [1]. Одной из удобных моделей является модель цепи Маркова с дискретным временем. Однако, поскольку число параметров цепи Маркова с ростом ее порядка («глубины памяти») растет экспоненциально, то использование на практике цепей Маркова высокого порядка становится малоэффективным. Для преодоления этого недостатка был разработан и исследован ряд «малопараметрических» моделей ДВР с «длинной памятью» [2–5]. Большинство работ, в которых рассматриваются такие модели, посвящены в основном практическому применению этих моделей. В данном докладе для одной из таких наиболее широко применяемых моде-