АЛГОРИТМ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ

С. А. Береснев

1. ВВЕДЕНИЕ

При численном исследовании процессов гидромеханики в ограниченных объемах магнитной жидкости приходится решать сопряженную задачу о структуре магнитного поля. Вообще говоря, магнитное поле внутри жидкости описывается нелинейным уравнением Максвела, а снаружи – линейным уравнением Максвела. В ряде частных случаев, например, если капля жидкости имеет форму эллипсоида, задача становится линейной как внутри, так и снаружи. На границе раздела магнитной и немагнитной сред ставятся условия непрерывности касательной составляющей напряженности и нормальной составляющей индукции. Наиболее эффективным методом решения линейных уравнений является метод граничных элементов.

В [1] решена линейная задача о структуре магнитного поля на примере цилиндрического слоя магнитной жидкости (плоская задача) . Данная работа посвящена реализации метода граничных элементов в случае, когда объем жидкости является эллипсоидом вращения (осесимметричная задача).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается капля магнитной жидкости, имеющая форму вытянутого эллипсоида вращения, помещенная в однородное магнитное поле и окруженная немагнитным газом.

Индексами (1) и (2) будем обозначать функции, определенные внутри и вне капли соответственно. Безразмерная постановка задачи имеет вид

$$\nabla \cdot (\mu \nabla u) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0; \quad 0 \le r < \infty,\ 0 \le z < \infty \tag{1}$$

$$u^{(1)}\big|_{\Gamma} = u^{(2)}\big|_{\Gamma},\ \mu^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \mu^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\Big|_{\Gamma}; \tag{2}$$

$$u(r,0)=0\,,\ \frac{\partial u}{\partial r}(0,z)=0; \tag{3}$$

$$u^{(2)}\,|_{r,z\to\infty}=h_\infty z\,, \tag{4}$$

где $u(r,z)$ – безразмерный потенциал поля; (2) – условия сопряжения; (3) – условия симметрии; (4) – условие невозмущенного магнитного поля на бесконечности; $h_\infty = H_0/H_*$; H_0 – напряженность внешнего магнитного поля на бесконечности; $\mu^{(1)} = const \geq 1$, $\mu^{(2)} = 1$ – магнитная проницаемость контактирующих сред; Г – меридиан граничной поверхности. Решение задачи (1) – (4) определяется параметрами $\mu^{(1)}$ и h_∞.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Поскольку потенциал магнитного поля внутри и вне капли описывается уравнением Лапласа, фундаментальное решение которого известно, то для решения задачи естественно воспользоваться методом граничных элементов [2]. Для его применения необходимо ввести замену $u^{(2)}(r,z)=\tilde{u}(r,z)+h_\infty z$. В новых переменных задача эквивалентна решению системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi\tilde{u}(\xi)=\oint\limits_\Gamma(\tilde{u}q^*r-u^*\tilde{q}r)d\Gamma \\ -\frac{1}{2}\pi u^{(1)}(\xi)=\oint\limits_\Gamma(u^{(1)}q^*r-u^*q^{(1)}r)d\Gamma \end{cases},\ \xi\in\Gamma \tag{5}$$

$$u^*(\xi,x)=\frac{4K(m)}{(a+b)^{1/2}}\ ;$$

$$q^*=\frac{4}{(a+b)^{1/2}}\left\{\frac{1}{2(r(x))}\left[\frac{r^2(\xi)-r^2(x)+(z(\xi)-z(x))^2}{a-b}E(m)-K(m)\right]n_r+\right.$$

$$\left.+\frac{z(\xi)-z(x)}{a-b}E(m)n_z\right\};$$

$$m=2b/(a+b);$$

$$a=r^2(\xi)+r^2(x)+(z(\xi)-z(x))^2,\ b=2r(\xi)r(x),$$

где u^* – фундаментальное решение уравнения Лапласа в осесимметричном случае; $q^* = \partial u^* / \partial n$; $\tilde{q} = \partial \tilde{u} / \partial n$ – производная по нормали от неизвестной функции $\tilde{u}$; нормаль n является внешней к контуру Γ; n_r, n_z – компоненты вектора нормали; $K(m), E(m)$ – эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Применяя условия (2), систему (5) при $\xi \in \Gamma$ можно свести к решению одного интегрального уравнения относительно $u^{(1)}$

$$-\frac{1}{2}\pi u^{(1)}(\xi) + (2/(1+\mu)-1)\oint_{\Gamma} u^{(1)} q^* r d\Gamma = \frac{h_\infty}{1+\mu}(\oint_{\Gamma} z q^* r d\Gamma - \\ - \oint_{\Gamma} u^* \cos(n,z) r d\Gamma - \frac{1}{2}\pi z) \tag{6}$$

После аппроксимации граничного контура ломаной линией $\Gamma \approx \tilde{\Gamma} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\Gamma}_j$, где $\tilde{\Gamma}_j$ – отрезок, соединяющий граничные узлы ξ_{j-1} и ξ_j, и аппроксимации функции $u^{(1)}(\xi)$ постоянным значением на каждом из отрезков, получим дискретное представление уравнения (6), представляющее собой систему алгебраических уравнений

$$-\frac{1}{2}\pi u^{(1)}_{i-1/2} + (2/(1+\mu)-1)\sum_{j=1}^{N} w_{ij} u^{(1)}_{j-1/2} = f_i ;.\ 1 \le i \le N ; \tag{7}$$

$$w_{ij} = \int_{S_{j-1}}^{S_j} q^* r dS ,\ v_{ij} = \int_{S_{j-1}}^{S_j} u^* r dS . \tag{8}$$

Основная сложность при решении системы (7), заключается в вычислении интегралов (8), в особенности эллиптических интегралов, которые входят в (8). Один из эффективных способов нахождения эллиптических интегралов – представление их в виде полиномов [3]:

$$E(m) \approx 1 + \sum_{i=1}^{4}(d_i + t_i \ln\frac{1}{m_1}) m_1^i ; \\ K(m) \approx \sum_{i=0}^{4}(p_i + e_i \ln\frac{1}{m_1}) m_1^i ; \tag{9}$$

$$m_1 = 1 - m ,$$

где коэффициенты d_i, t_i, p_i, e_i табулированы и приведены в [2]. Известно, что разложения (9) аппроксимируют эллиптические интегралы с погрешностью порядка 10^{-8}. Однако при этом в подинтегральных функциях (8) появляется логарифмическая особенность. Для более точного их вычисления используются квадратурные формулы Гаусса с соответствующими весами, что в совокупности с (9) позволяет добиться приемлемой точности .

Для решения системы (7) применяется метод исключения Гаусса. Аналогично определяются граничные значения $q^{(1)}$. По известному решению на границе явным образом находятся значения потенциала внутри области

$$-\pi u_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} u_{j-1/2}^{(1)} - \sum_{j=1}^{N} v_{ij} q_{j-1/2}^{(1)},$$

где $u_{j-1/2}^{(1)}$ и $q_{j-1/2}^{(1)}$ – известные значения потенциала и потока на границе, $u_i^{(1)}$ – искомое значение внутри области. Аналогичным способом определяется потенциал $u^{(2)}(\xi)$ в любой точке $\xi = (x, y)$ вне капли.

Преимущество метода граничных элементов для данной задачи над распространенным в настоящее время методом конечных элементов заключается в том, что он не требует введения сетки ни внутри капли, ни во внешней бесконечной области, а условие на бесконечности (4) выполняется точно.

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что полученные результаты точно отражают структуру магнитного поля.

Литература

1. *Береснев С. А.* Комбинированный метод граничных и конечных элементов решения сопряженной задачи магнитостатики //61 конференция студентов и аспирагтов БГУ. Мн., 2004.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов/ Пер. с англ. Л. Г. Корнейчука; Под ред. И. Г. Григолюка. М.: Мир, 1987. 524 с.
3. *Абрамовиц М.*, *Стиган И.* Справочник по специальным функциям М.:Наука, 1979.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ LSB-МЕТОДА СТЕГАНОГРАФИИ ДЛЯ АУДИОСИГНАЛОВ

Д. П. Глиндзич

В данной работе рассматривается метод встраивания скрытого сообщения в наименее значащие биты элементов контейнера (LSB)[1]. Решаются задачи вычисления распределений вероятностей отсчетов и значений их битов и минимизации различия между распределениями вероятностей отсчетов контейнера и стеганограммы.