

## КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ И РЕОЛОГИЧЕСКИ АКТИВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. ivan.a.tarasyuk@gmail.com

Выполнено обобщение уравнения крутильных колебаний круглого стержня на случай произвольной длины стержня. Получено уравнение крутильных колебаний композиционного стержня, а также зависимость частоты собственных колебаний от характеристик его компонент. Установлено, что применение гипотезы Фойгта соответствует колебаниям волокнистого вдоль оси и коаксиально слоистого стержней, а применение гипотезы Рейсса – колебаниям поперечного слоистого стержня. Для сужения «вилки» Фойгта-Рейсса эффективных характеристик и решения задачи гомогенизации крутильных колебаний композиционного, изотропного в среднем стержня применен метод Кравчука-Тарасюка. Исследовано влияние реологического поведения материала стержня при крутильных колебаниях.

Уравнение крутильных колебаний круглого стержня является одним из классических примеров нестационарных уравнений математической физики. Однако накопленный материал по уравнениям состояния твердого тела, а также необходимость изучения колебательных процессов стержней из композиционных и реологически активных материалов заставляют вернуться к классическому выводу уравнению колебаний с целью его обобщения и разработки методики решения указанного класса задач.

При выводе уравнения крутильных колебаний круглого стержня будем придерживаться основных положений и гипотез, лежащих в основе кручения круглых стержней из теории сопротивления материалов. Предполагается, что поперечные сечения при кручении остаются плоскими и сохраняют первоначальное расстояния, а радиусы не искривляются. Тогда кручение можно представить как результат сдвигов, вызванных поворотом сечений друг относительно друга вокруг оси. Вследствие этого в сечениях возникают только касательные напряжения, которые приводятся к паре сил, момент которой называется крутящим [1].

Пусть стержень имеет длину  $l$  и радиус сечения  $R$  (Рисунок 1. Кручение элемента стержня). Будем считать, что левый конец стержня неподвижен, и в центр его сечения поместим начало координат, направив ось  $Ox$  вдоль оси стержня. В результате закручивания сечение  $S_1$ , взятое на расстоянии  $x_1$  от заделки, повернется на угол  $\theta$ , а сечение  $S_2$ , взятое на расстоянии  $x_2$ , повернется на угол  $\theta + d\theta$ . Тогда поворот  $S_2$  относительно  $S_1$  составит  $d\theta$ .

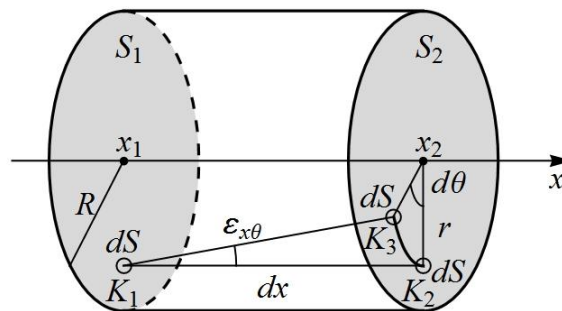


Рисунок 1. Кручение элемента стержня

Рассмотрим элемент  $dS$  сечения  $S_1$ , расположенный на расстоянии  $r$  от центра сечения. Поскольку угловой мерой сдвига является приращение  $d\theta$ , учитывая малость сдвига и расстояния  $dx$  между  $x_2$  и  $x_1$ , величина крутящего момента при сдвиге волокна  $K_1K_2$  в положение  $K_1K_3$  в общем случае равна (Рисунок 1. Кручение элемента стержня):

$$dM = r \sigma_{x\theta} dS = r \mathfrak{T}(\varepsilon_{x\theta}) dS = r \mathfrak{T}\left(r \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dS, \quad (1)$$

где  $\sigma_{x\theta} = \mathfrak{Z}(\varepsilon_{x\theta})$  – обобщенное уравнение состояния материала при чистом сдвиге.

Из (1) следует, что приращение главного крутящего момента при переходе от  $x_1$  к  $x_2$ :

$$\Delta M = \iint_S r \mathfrak{Z} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \right) dS = \iint_S r^2 \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{Z}' \left( r \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx dS. \quad (2)$$

Приравнявая (2) и приращение инерционной составляющей момента волокна  $K_1 K_2$ , а также меняя порядок интегрирования, получим интегральное уравнение баланса моментов:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \iint_S r^2 dS - \iint_S r^2 \mathfrak{Z}' \left( r \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dS \right) dx = 0, \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность волокна стержня.

Применяя к (3) теорему о среднем, с учетом произвольности точек  $x_1$  и  $x_2$  получим локальное уравнение крутильных колебаний круглого стержня:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho J_0} \iint_S r^2 \mathfrak{Z}' \left( r \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dS, \quad (4)$$

где  $J_0 = \pi R^4 / 2$  – полярный момент инерции поперечного сечения [1].

При крутильных колебаниях линейно-упругого стержня, т.е. когда  $\mathfrak{Z}'(\varepsilon) = G$  – модуль сдвига, (4) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Собственные частоты колебаний линейно-упругого стержня при краевых условиях закрепления его левого конца и отсутствия крутящего момента на правом имеют вид:

$$\omega_i = \frac{i \pi}{2l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (6)$$

Рассмотрим композиционный материал, состоящий из  $n$  компонент с объемными долями  $\gamma_k$ , модулями сдвига  $G_k$  и плотностями  $\rho_k$ . Рассмотрим элемент стержня между точками  $x_1$  и  $x_2$  (Рисунок 1). Длина фрагмента стержня такова, что объемные доли  $\gamma'_k$  компонент материала для выделенного элемента совпадают с концентрациями  $\gamma_k$ . Фрагмент стержня минимальной длины, удовлетворяющий указанной выше гипотезе по объемным долям, называется макроточкой композиционного материала. Применяя гипотезу Фойгта об однородности деформаций в объеме стержня, по аналогии с выводом (1)-(4), получим уравнение колебаний волокнистого вдоль оси и коаксиально слоистого линейно-упругого стержня [2]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\langle G \rangle_\Phi}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \langle G \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^n \gamma_k G_k, \quad \langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k. \quad (7)$$

Применяя гипотезу Рейсса об однородности напряжений в объеме стержня, аналогично (1)-(4) получим уравнение колебаний поперечно слоистого линейно-упругого стержня [2]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\langle G \rangle_P}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \langle G \rangle_P = \left( \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{G_k} \right)^{-1}, \quad \langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k. \quad (8)$$

Собственные частоты колебаний указанных композиционных стержней определяются аналогично (6) с учетом выражений для эффективных модулей сдвигов и плотностей (7)-(8).

Для решения задачи гомогенизации крутильных колебаний композиционного в среднем изотропного линейно-упругого стержня и сужения «вилки» Фойгта-Рейсса эффективных деформационных характеристик применим метод Кравчука-Тарасюка, основанный на определении эффективных характеристик по правилу смеси для напряжений и деформаций, полученных с применением гипотез Фойгта и Рейсса [3]. Аналогично (1)-(4) получим уравнение крутильных колебаний композиционного в среднем изотропного линейно-упругого стержня:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\langle G \rangle_{KT}}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \langle G \rangle_{KT} = \frac{1}{2} (\langle G \rangle_{KT}^\varepsilon + \langle G \rangle_{KT}^\sigma), \quad \langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k, \quad (9)$$

$$\langle G \rangle_{KT}^\varepsilon = \int_0^1 (\alpha \langle G \rangle_\Phi + (1-\alpha) \langle G \rangle_P) d\alpha = \frac{1}{2} (\langle G \rangle_\Phi + \langle G \rangle_P),$$

$$\langle G \rangle_{KT}^\sigma = \int_0^1 \frac{\langle G \rangle_\Phi \langle G \rangle_P}{\alpha \langle G \rangle_P + (1-\alpha) \langle G \rangle_\Phi} d\alpha = \frac{\langle G \rangle_\Phi \langle G \rangle_P}{\langle G \rangle_\Phi - \langle G \rangle_P} \ln \frac{\langle G \rangle_\Phi}{\langle G \rangle_P}, \quad (10)$$

а собственные частоты колебаний определяются аналогично (6) с учетом выражений (9)-(10). Линейное уравнение ползучести однородно стареющего тела имеет вид [4]:

$$\varepsilon_{x\theta}(t) = \frac{\sigma_{x\theta}}{G(t)} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right], \quad (11)$$

где  $G(t)$  – мгновенный модуль сдвига,  $\Gamma(t, \tau)$  – ядро ползучести.

Тогда по аналогии с выводом (1)-(4) получим уравнение крутильных колебаний реологически активного стержня:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G(t)}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right]^{-1}, \quad (12)$$

а собственные частоты колебаний с учетом ползучести материала стержня имеют вид:

$$\omega_i = \frac{i\pi}{2l} \sqrt{\frac{G(t)}{\rho} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right]^{-1}}. \quad (13)$$

#### Список литературы

1. Араманович, И.Г. Уравнения математической физики / Г.И. Араманович., В.И. Левин /. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
2. Победря, Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря /. – М.: Издательство МГУ, 1984. – 336 с.
3. Тарасюк, И.А. Сужение «вилки» Фойгта-Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов / И.А. Тарасюк, А.С. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. – 2014. – № 3. Режим доступа: [http://apriori-journal.ru/seria\\_2/3-2014/Tarasjuk-Kravchuk.pdf](http://apriori-journal.ru/seria_2/3-2014/Tarasjuk-Kravchuk.pdf) (Дата обращения: 14.03.2017)
4. Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории ползучести / Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров /. – Ереван: Институт механики НАН Армении, 1999. – 320 с.