

Далее используем то, что равенство $\nabla_{fX}(f)fX = 0$ (из определения NKf -структуры) равносильно (для естественно редутивных пространств) условию (см. [6]):

$$[fY, f^2Y] \in \mathfrak{h} \text{ для } \forall Y \in \mathfrak{m}. \quad (3)$$

Таким образом, используя условие (3), получен следующий результат:

Теорема. Для псевдоримановых многообразий $M = G/G^\Phi$ групп Ли $G = O^+(2, k)$, $k \geq 2$ с естественно редутивной метрикой g канонические f -структуры f_1, f_2, f_3 являются NKf -структурами, а структура f_4 не принадлежит классу NKf .

Литература

1. Балащенко В. В. Однородные приближенно келеровы f -многообразия // Доклады РАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 439–441.
2. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М. ВИНТИ. 1986. Т. 18. С. 25–71.
3. Степанов Н. А. Основные факты теории ϕ -пространств // Изв. ВУЗов. Математика. 1967. № 3. С. 88–95.
4. Балащенко В. В., Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ -пространствах // Мат. Сб. 1995. Т. 186. № 11. С. 3–34.
5. Феденко А. С. Пространства с симметриями. Мн.: Изд-во БГУ. 1977. 168 с.
6. Balashchenko V. V. Invariant nearly Kähler f -structures on homogeneous spaces // Contemporary Mathematics. 2001. V. 288. p. 263–267.

ЗАДАЧА РАСПОЗНАВАНИЯ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР ЛИНЕЙНЫХ 3-УНИФОРМНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

П. В. Скумс

Графы пересечений ребер линейных k -униформных гиперграфов

Граф пересечений ребер $L(H)$ гиперграфа H определяется следующими условиями: вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H и две вершины смежны в $L(H)$ тогда и только тогда, когда соответствующие ребра пересекаются.

Гиперграф называется k -униформным, если каждое его ребро содержит в точности k вершин. В линейном гиперграфе никакие два ребра не

имеют более одной общей вершины. Класс графов пересечений ребер линейных k -униформных гиперграфов обозначается через L_k^l .

Класс L_2^l реберных графов простых графов изучен хорошо: известны эффективные (линейные) алгоритмы распознавания принадлежности произвольного графа этому классу [1]. Ситуация качественно меняется, если от $k = 2$ перейти к $k \geq 3$. Доказано, что задача « $G \in L_k^l$ » для любого $k \geq 3$ является NP-полной [2].

Однако случай $k = 3$ является особым, поскольку для этого и только этого k определяющую роль играет минимальная степень вершин графа $\delta(G)$. А именно, существует такое натуральное число δ^* , что задача « $G \in L_3^l$ » полиномиально разрешима для графов с $\delta(G) \geq \delta^*$ и NP-полна при $\delta(G) < \delta^*$. Известно, что $\delta^* \geq 6$ [3]. В настоящей работе уточняется верхняя граница для δ^* : $\delta^* \leq 10$.

Большие клики и сводящие семейства

Клик называется произвольное множество попарно смежных вершин графа. Семейство $Q = (C_1, C_2, \dots, C_q)$ клик графа G называется *краусовым k -разбиением* графа, а клики C_i — *кластерами* этого разбиения, если выполняются следующие условия: каждое ребро графа G включается ровно в один кластер C_i и каждая вершина графа G входит не более чем в k кластеров разбиения Q .

Теорема 1 [8,14]. Граф G принадлежит классу L_k^l , если и только если существует краусово k -разбиение графа G .

Ниже краусово 3-разбиение будем называть просто краусовым разбиением.

Пусть Q — краусово разбиение графа $G \in L_3^l$. Произвольное подсемейство $F \subseteq Q$ называется *фрагментом* этого разбиения или просто *фрагментом*. Произвольное краусово разбиение графа G , включающее F , называется *расширением* фрагмента F .

Пусть теперь G — произвольный граф, а R — некоторое семейство клик G . Назовем семейство R *сводящим*, если:

- каждая вершина графа покрывается одной или тремя кликами из R ;
- клики из R не имеют общих ребер;
- R является фрагментом, если и только если $G \in L_3^l$.

Обозначим через H граф, получаемый из G удалением ребер, покрытых сводящим семейством R , т.е. $H = G - ER$. Если какая-то вершина $v \in VG$ покрыта тремя кликами C_1, C_2, C_3 из R и $N(v) \setminus (C_1 \cup C_2 \cup C_3) \neq \emptyset$, то

$G \notin L_3^l$. Если же таких вершин нет, то $G \in L_3^l$ тогда и только тогда, когда $H \in L_2^l$, причем если S — краусово 2-разбиение графа H , то $R \cup S$ — краусово 3-разбиение графа G .

Пусть T — некоторое семейство клик. Множество $\bar{T} = T \cup \{C_v = (N(v) \setminus VT) \cup \{v\} : v \in VG \text{ покрыта ровно двумя кликами из } T \text{ и } C_v - \text{клика}\}$ назовем замыканием множества T .

Лемма 1 (лемма о замыкании). Пусть семейство клик T покрывает все вершины графа G и удовлетворяет условиям 2), 3) из определения сводящего семейства. Тогда либо $G \notin L_3^l$, либо множество $\bar{T}$ — сводящее.

Максимальная по включению $\geq k^2 - k + 2$ — клика графа называется k — большой. 3-большую клику будем называть просто большой.

Лемма 2 (лемма о большой клике) [3]. Каждая k -большая клика графа является кластером любого его краусова k -разбиения.

Пусть G — произвольный граф с $\delta(G) \geq 10$. Основным результатом настоящей работы является линейный алгоритм, который для графа G строит сводящее семейство. Алгоритм расширяет некоторое множество клик F до сводящего, добавляя к нему на каждой итерации новую клику из графа $H = G - EF$. Из леммы 2 следует, что в качестве начального семейства всегда можно брать замыкание множества больших клик, если оно не пусто.

Если же множество больших клик графа G пусто, то будем поступать следующим образом. Зафиксируем произвольную вершину $z \in VG$. По теореме 1 для нее должно выполняться неравенство $\deg(z) \leq 18$. Выберем произвольную максимальную клику C , содержащую z , и положим в качестве начального семейства F множество $\{C\}$. Если нашему алгоритму не удалось расширить F до сводящего семейства R или граф $H = G - ER \notin L_3^l$, то, как будет показано ниже, C не является кластером никакого фрагмента. Выберем тогда в качестве C другую клику из $B_1[z]$. В худшем случае придется проверить все клики из $B_1[z]$, причем $|B_1[z]| \leq 19$.

Квазифрагменты и предбольшие клики

Пусть на предыдущих итерациях работы алгоритм построил множество клик F . Покажем, какие клики могут быть добавлены к F на данной итерации. Без ограничения общности можно считать, что все клики графа H имеют порядок ≤ 7 и $\Delta(H) \leq 18$.

Зафиксируем некоторую вершину a графа H . Пусть $\text{ecc}(a)$ — эксцентриситет вершины a в H . Для $k = 1, 2, \dots, \text{ecc}(a)$ положим $B_k = B_k[a]$ — шар

в H радиуса k с центром в вершине a , $S_k = S_k[a]$ — сфера радиуса k с центром в a .

Поскольку $\Delta(H) \leq 18$, то $|S_k| \leq 18 \cdot |S_{k-1}|$ для любого $k=1,2,\dots, \text{ecc}(a)$. Так что если k фиксировано, то число вершин в B_k ограничено константой. Это позволяет за время $O(1)$ осуществить разумный перебор всех возможных кликовых покрытий графа, порожденного множеством B_k , и выделить среди них *квазифрагменты*, т.е. те покрытия, которые в объединении с F могли бы оказаться фрагментами.

Список $F_k = F_k(a) = \{C_1, \dots, C_q\}$ клик графа H называется *k-квазифрагментом с центром в вершине a* (или просто *квазифрагментом*), а сами эти клики — *кластерами* квазифрагмента F_k , если выполняются следующие условия:

1. Каждое ребро графа H , инцидентное вершине из B_{k-1} , покрыто F_k .
2. При $k < \text{ecc}(a)$ каждый кластер C_i содержит вершину из B_{k-1} .
3. При $k = \text{ecc}(a)$ каждое ребро, оба конца которого включаются в B_k , покрыто F_k .
4. Никакие два кластера C_i не имеют более одной общей вершины.
5. Каждая вершина графа H принадлежит не более чем трем кластерам из $F \cup F_k$.

Назовем $F_l \subset F_k$ *основой* квазифрагмента F_k .

Клику $C \subseteq B_k$ назовем *особой*, если она является кластером любого $k+1$ -квазифрагмента $F_{k+1}(a)$. Максимальные клики порядка 6 и 7 назовем *предбольшими*. Скажем, что клика C *касается* фрагмента F , если C содержит вершину, покрытую F .

Предбольшую клику C назовем *хорошей*, если она удовлетворяет одному из следующих условий:

1. C касается F .
2. существует вершина $v \in V(H) \setminus C$, такая, что $|C \cap N(v)| = 1$ при $|C| = 6$ либо $1 \leq |C \cap N(v)| \leq 2$ при $|C| = 7$.

Лемма 3. Если C — хорошая клика, то $F \cup \{C\}$ — фрагмент.

Теорема 2. Пусть C — предбольшая клика, содержащая вершину a . Пусть, далее, $\delta(G) \geq 10$ и в $B_2[a]$ нет ни особых, ни хороших клик. Тогда $F \cup \{C\}$ — фрагмент.

Таким образом, лемма 3 и теорема 2 позволяют алгоритму добавлять к F предбольшие, хорошие и особые клики. Остается рассмотреть случай, когда в H нет клик перечисленных видов. В этом случае верна следующая

Теорема 3. Пусть a — вершина графа H , покрытая фрагментом F . Пусть, далее, в $B_4[a]$ нет особых и предбольших клик, и пусть $\delta(G) \geq 10$.

Тогда для любого квазифрагмента F_5 с основой F_1 объединение $F \cup F_1$ является фрагментом.

Сложность алгоритма, схему которого мы привели, определяется сложностью построения списка больших клик графа G . Таким образом, доказана

Теорема 4. Существует алгоритм с временной сложностью $O(n \cdot m)$, решающий задачу распознавания « $G \in L_k^l$ » в классе графов G с минимальной степенью вершин $\delta(G) \geq 10$.

Литература

1. *Lehot P.G.H.* An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph // J. Assoc. Comput. Math. 1974. V. 21. P. 569–575.
2. *Hlineny P. Kratochvil J.* Computational complexity of the Krausz dimension of graphs // Lecture notes in Computer Science, Springer-Verlag. 1997. №1335. P. 214–228.
3. *Метельский Ю.М., Суздаль С.В., Тышкевич Р.И.* Распознавание графов пересечений ребер линейных 3-униформных гиперграфов // Труды Института математики НАН Беларуси. 2001. Т. 8. С. 76–92.

РЕАЛИЗАЦИЯ ЭВРИСТИЧЕСКОГО ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

А. С. Старпович

Проблема эвристического обучения (ЭО) в теории и практике образования является актуальной, т.к. система эвристических методов и приемов предполагает отказ от готовых знаний, от их репродукции, основываясь на добыче и поиске информации. Небывалый рост объема информации требует от современного человека таких качеств, как инициативность, изобретательность, креативность, предприимчивость, способность быстро и безошибочно принимать решения, а это невозможно без умения работать творчески, самостоятельно. Формирование вышеперечисленных качеств, как показывают результаты исследований, как раз и является основной целью ЭО.

Эвристическое обучение известно со времен Сократа, который побуждал собеседников последовательно развивать спорное положение, приводил к постижению абсурдности исходного утверждения, а затем методом поиска истины наводил на верный путь. Этот метод развивался и совершенствовался в трудах великих мыслителей и педагогов (Я.А. Коменского, И.Г. Песталоцци, Дж. Дьюи, В.А. Крутецкого, Д. Пойа, Л.М. Фридмана, Е.Н. Турецкого).

Анализ литературы (А. В. Хуторской, Е. Н. Турецкий, Ю. М. Калягин и др.) позволяет сделать вывод, что основными функциями ЭО вы-