КАНОНИЧЕСКИЕ *F*-СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКА 6 ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ O(2, *K*)

А. С. Самсонов

Одним из центральных объектов при исследовании дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях являются *f*-структуры классического типа ($f^3 + f = 0, f \neq 0$), которые включают почти комплексные структуры ($J = -1$). Среди метрических *f*-структур имеется важный класс приближенно келеровых *f*-структур (nearly Kähler *f*-structure) или, короче, *NKf*-структуры (см. [1]). Эти структуры, содержащие киллинговы *f*-структуры и классические *NK*-структуры, входят в обширный класс обобщенных G_1 структур (см. [2]).

В данной работе построена серия псевдо-римановых многообразий (M, g) с набором канонических *f*-структур, среди которых присутствуют *NKf*-структуры, а также те, которые таковыми не являются.

Пусть G – связная группа Ли, Ф – ее аналитический автоморфизм. Обозначим через G^{Φ} подгруппу всех Ф-неподвижных элементов из G, а через G_o^{Φ} – связную компоненту единицы G^{Φ}.

Определение 1 [3], [4], [5]. Однородное пространство G/H называется Ф-*пространством*, если H является замкнутой подгруппой группы G и $G_o^{\Phi} \subset H \subset G^{\Phi}$.

Дифференциал $\varphi = d\Phi_e$ (см. [3]) является автоморфизмом алгебры Ли $\boldsymbol{g}$ группы G, причем алгебра Ли $\boldsymbol{h}$ группы H совпадает с ядром линейного оператора $A = \varphi - id$: $\boldsymbol{h} = \operatorname{Ker} A$. Обозначим через $\boldsymbol{g}_0$ 0-компоненту Фиттинга оператора A.

Определение 2 [3], [4], [5]. Однородное Ф-пространство G/H называется *регулярным*, если выполняется условие $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g}_0$.

В случае регулярного Ф-пространства 1-компонента Фиттинга $\boldsymbol{m}$ линейного оператора A совпадает с его образом $\boldsymbol{m} = A\boldsymbol{g}$. Разложение $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h} \oplus \boldsymbol{m}$ называется каноническим редуктивным разложением алгебры Ли $\boldsymbol{g}$. В каноническом разложении подпространство $\boldsymbol{m}$ является редуктивным оснащающим подпространством [3]. Обозначим ограничение φ на $\boldsymbol{m}$ через θ.

Известно, что *аффинорной структурой* на многообразии называется тензорное поле типа (1, 1). Наиболее изученными аффинорными структурами на многообразиях являются почти комплексные структуры, структуры почти произведения, а также *f*-структуры.

Определение 3 [4]. Инвариантная аффинорная структура F на однородном регулярном Ф-пространстве G/H называется *канонической*, если ее значение F_0 в точке $p_0 = H$ является полиномом от θ.

Определение 4 [1]. Метрическая f-структура называется *приближенно келеровой f-структурой* (или *NKf-структурой*), если выполняется условие $\nabla_{fX}(f)fX = 0$ для связности Леви-Чивита ∇ (псевдо-)риманова многообразия (M, g) и любого гладкого векторного поля X на M.

Рассмотрим связную компоненту $G = O_{\uparrow}^{+}(2, k)$ псевдоортогональной группы $O(2, k)$, $k \geq 2$.

Рассмотрим также внутренний автоморфизм группы G: Ф: $G \to G$, $g \to s\, g\, s^{-1}$,

где $s = \begin{pmatrix} J & O \\ O & I_{1\times(k-1)} \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $I_{1\times(k-l)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ & \ldots\ldots & \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Отображение Ф является автоморфизмом порядка 6 группы G. Обозначим через $M = G/G^{\Phi}$ однородное Ф-пространство порядка 6, порождаемое этим автоморфизмом.

Алгебра Ли $\boldsymbol{g}$ группы Ли G определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{g} = \left\{ X = \begin{pmatrix} A_{2\times2} & B_{2\times k} \\ B_{2\times k}^{t} & C_{k\times k} \end{pmatrix} \middle| A_{2\times2}^{t} = -A_{2\times2}, C_{k\times k}^{t} = -C_{k\times k} \right\}.$$

Обозначим $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $B_{2,k} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & \ldots & b_{2,k} \end{pmatrix}$,

$$C_{k\times k} = \begin{pmatrix} 0 & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,k} \\ -c_{1,2} & 0 & c_{2,1} & \cdots & c_{2,k} \\ -c_{1,3} & -c_{2,1} & 0 & \cdots & c_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & c_{k-1,k} \\ -c_{1,k} & -c_{2,k} & -c_{3,k} & \ldots\ -c_{k-1,k} & 0 \end{pmatrix}.$$

Дифференциал $\varphi = d\Phi_e$ каждому X ставит в соответствие

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} A_{2\times2} & B'_{2\times k} \\ B'^{t}_{2\times k} & C'_{k\times k} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $B'_{2\times k}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(b_{1,1}+\sqrt{3}b_{2,1}\right) & -\frac{1}{2}\left(b_{1,2}-\sqrt{3}b_{2,2}\right) & ... & -\frac{1}{2}\left(b_{1,k}-\sqrt{3}b_{2,k}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}b_{1,1}+b_{2,1}\right) & \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}b_{1,2}-b_{2,2}\right) & ... & \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}b_{1,k}-b_{2,k}\right) \end{pmatrix}$,

$$C'_{k\times k}=\begin{pmatrix} 0 & -c_{1,2} & -c_{1,3} & \cdots & & -c_{1,k} \\ c_{1,2} & 0 & c_{2,1} & \cdots & & c_{2,k} \\ c_{1,3} & -c_{2,1} & 0 & \cdots & & c_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & c_{k-1,k} \\ c_{1,k} & -c_{2,k} & -c_{3,k} & ... & -c_{k-1,k} & 0 \end{pmatrix}.$$

В каноническом разложении $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{h}\oplus\boldsymbol{m}$ подалгебра Ли $\boldsymbol{h}$ и подпространство $\boldsymbol{m}$ имеют вид:

$$\boldsymbol{h}=\left\{\begin{pmatrix} A_{2\times 2} & O_{2\times k} \\ O^t_{2\times k} & C''_{k\times k} \end{pmatrix} \middle| C''_{k\times k}=\begin{pmatrix} 0 & O_{1\times k} \\ O^t_{1\times k} & C_{k-1\times k-1} \end{pmatrix},\ C^t_{k-1\times k-1}=-C_{k-1\times k-1}\right\},$$

$$\boldsymbol{m}=\left\{\begin{pmatrix} O_{2\times 2} & B_{2\times k} \\ B^t_{2\times k} & C'''_{k\times k} \end{pmatrix} \middle| C'''_{k\times k}=\begin{pmatrix} 0 & C_{1\times k} \\ -C^t_{1\times k} & O_{k-1\times k-1} \end{pmatrix}\right\}. \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), легко записать действие оператора θ.

Используя формулы для нахождения канонических f-структур на однородных Ф-пространствах порядка n (см. [4]), запишем канонические f-структуры для автоморфизма порядка $n = 6$:

$$f_1=\frac{\sqrt{3}}{6}(\theta+\theta^2-\theta^4-\theta^5),\ f_2=\frac{\sqrt{3}}{6}(\theta-\theta^2+\theta^4-\theta^5),$$

$$f_3=\frac{\sqrt{3}}{3}(\theta-\theta^5),\ f_4=\frac{\sqrt{3}}{3}(\theta^2-\theta^4).$$

Например, для любого $Y=\begin{pmatrix} O_{2\times 2} & B_{2\times k} \\ B^t_{2\times k} & C'''_{k\times k} \end{pmatrix}\in\boldsymbol{m}$ действие структуры f_2 выглядит следующим образом:

$$f_2(Y)=\begin{pmatrix} O_{2\times 2} & B''_{2\times k} \\ B''^t_{2\times k} & O_{k\times k} \end{pmatrix},$$

где $B''_{2\times k}=\begin{pmatrix} 0 & -b_{2,2} & ... & -b_{2,k} \\ 0 & b_{1,2} & ... & b_{1,k} \end{pmatrix}$.

Далее используем то, что равенство $\nabla_{fX}(f)fX = 0$ (из определения NKf-структуры) равносильно (для естественно редуктивных пространств) условию (см. [6]):

$$[fY, f^2Y] \in \boldsymbol{h} \text{ для } \forall\ Y \in \boldsymbol{m}. \tag{3}$$

Таким образом, используя условие (3), получен следующий результат:

Теорема. Для псевдоримановых многообразий $M = G/G^{\Phi}$ групп Ли $G = O^{+}_{\uparrow}(2, k)$, $k \geq 2$ с естественно редуктивной метрикой g канонические f-структуры f_1, f_2, f_3 являются NKf-структурами, а структура f_4 не принадлежит классу NKf.

Литература

1. *Балащенко В. В.* Однородные приближенно келеровы f-многообразия // Доклады РАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 439–441.
2. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М. ВИНИТИ. 1986. Т. 18. С. 25–71.
3. *Степанов Н. А.* Основные факты теории φ–пространств // Изв. ВУЗов. Математика. 1967. № 3. С. 88–95
4. *Балащенко В. В., Степанов Н. А.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Мат. Сб. 1995. Т. 186. № 11. С. 3–34.
5. *Феденко А. С.* Пространства с симметриями. Мн.: Изд-во БГУ. 1977. 168 с.
6. *Balashchenko V. V.* Invariant nearly Kähler f-structures on homogeneous spaces // Contemporary Mathematics. 2001. V. 288. p. 263–267.

ЗАДАЧА РАСПОЗНАВАНИЯ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР ЛИНЕЙНЫХ 3-УНИФОРМНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

П. В. Скумс

Графы пересечений ребер линейных k-униформных гиперграфов

Граф пересечений ребер $L(H)$ гиперграфа H определяется следующими условиями: вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H и две вершины смежны в $L(H)$ тогда и только тогда, когда соответствующие ребра пересекаются.

Гиперграф называется *k-униформным*, если каждое его ребро содержит в точности k вершин. В *линейном* гиперграфе никакие два ребра не