

где $\tau_n = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, $\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ – максимальные касательное и нормальное напряжения; C – коэффициент сцепления; φ – угол внутреннего трения; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения; и σ_t – предельное напряжение при одноосном растяжении.

Итак, можно сделать следующие выводы и дать такие рекомендации по использованию критериев предельных состояний для задач механики горных пород:

1. При выделении зоны непосредственного разрушения используется критерий наибольших нормальных напряжений, что согласно выражению (4) соответствует множеству Ω_2 значений главных напряжений.
2. При выделении зоны трещиноватости, образованной блочной структурой можно использовать широкий спектр критериев. Данное обстоятельство определяется тем, что в данной зоне разрушение породной толщи происходит вследствие обобщенных процессов сдвига и отрыва. Поэтому выбор наиболее адекватного критерия разрушения определяется набором факторов, которые в свою очередь «навязывают» массиву механизм разрушения (отрывом или сдвигом).

Литература

1. Барях А. А., Шумихина А. Ю. Крупномасштабное математическое моделирование геомеханических процессов при разработке калийных месторождений // Горн. журнал. 1993. № 4. С. 31–38.
2. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев. Наук. Думка. 1976.

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ

А. А. Ворошилов

Под дробным диффузионным уравнением понимается линейное дробное дифференциальное уравнение, полученное из классического уравнения диффузии с помощью замены производной первого порядка по переменной t на дробную производную (в смысле Римана-Лиувилля) порядка α .

Рассматривается задача типа Коши для дробного диффузионного уравнения в случае $1 < \alpha < 2$:

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbf{R}, t > 0; \lambda > 0), \quad (1)$$

$$(D_{0+,t}^{\alpha-1}u)(x,0)=f_1(x), (D_{0+,t}^{\alpha-2}u)(x,0)=f_2(x), \quad (2)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x,t)=0 \quad (t>0), \quad (3)$$

где $(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t)$ – частная производная Римана-Лиувилля порядка α ($1 < \alpha < 2$) по переменной t [1, с.342]:

$$(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\int_0^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \quad (4)$$

$$(D_{0+,t}^{\alpha-1}u)(x,0)=\lim_{t \rightarrow 0+}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \quad (5)$$

$$(D_{0+,t}^{\alpha-2}u)(x,0)=\lim_{t \rightarrow 0+}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}. \quad (6)$$

Метод решения состоит в применении к уравнению (1) преобразования Лапласа по переменной t и преобразования Фурье по переменной x .

Для преобразования Лапласа дробной производной Римана-Лиувилля порядка α справедлива формула [1, с. 116]

$$(LD_{0+}^{\beta}f)(p)=p^{\beta}(Lf)(p)-\sum_{k=1}^np^{k-1}(D_{0+}^{\beta-k}f)(0) \quad (n-1<\beta\leq n). \quad (7)$$

Поэтому, применив преобразование Лапласа по t к правой и левой части уравнения (1), получим

$$p^{\alpha}(L_tu)(x,p)-(D_{0+}^{\alpha-1}u)(x,0)-p(D_{0+}^{\alpha-2}u)(x,0)=\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(L_tu)(x,p). \quad (8)$$

Подставим начальные условия (2):

$$p^{\alpha}(L_tu)(x,p)-f_1(x)-pf_2(x)=\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(L_tu)(x,p). \quad (9)$$

Далее, применяя к (9) преобразование Фурье по переменной x и пользуясь формулой преобразования Фурье производной $F(D^n h(x))(\sigma)=(-i\sigma)^n(Fh)(\sigma)$, запишем

$$p^{\alpha}(F_x L_t u)(\sigma,p)-(F_x f_1)(\sigma)-p(F_x f_2)(\sigma)=\lambda^2(-i\sigma)^2(F_x L_t u)(\sigma,p), \quad (10)$$

откуда

$$(F_x L_t u)(\sigma, p) = \frac{1}{p^\alpha + \lambda^2 \sigma^2} (F_x f_1)(\sigma) + \frac{p}{p^\alpha + \lambda^2 \sigma^2} (F_x f_2)(\sigma). \quad (11)$$

По формулам преобразования Фурье [2],

$$\frac{1}{p^\alpha + \lambda^2 \sigma^2} = F_x \left[\frac{1}{2\lambda} p^{-\alpha/2} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda} p^{\alpha/2}\right) \right](\sigma), \quad (12)$$

$$\frac{p}{p^\alpha + \lambda^2 \sigma^2} = F_x \left[\frac{1}{2\lambda} p^{-(\alpha/2)+1} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda} p^{\alpha/2}\right) \right](\sigma). \quad (13)$$

Применим к (11) обратное преобразование Фурье по переменной x и воспользуемся теоремой о свертке Фурье $F((h * g)(x))(\sigma) = (Fh)(\sigma)(Fg)(\sigma)$ [1, стр. 36]:

$$\begin{aligned} (L_t u)(x, p) = & \left(\frac{1}{2\lambda} p^{-\alpha/2} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda} p^{\alpha/2}\right) \right) * f_1(x) + \\ & + \left(\frac{1}{2\lambda} p^{-(\alpha/2)+1} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda} p^{\alpha/2}\right) \right) * f_2(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Для того чтобы выразить из (14) $u(x, t)$, найдем обратное преобразование Лапласа функций, стоящих в правой части формулы. Для этого разложим функции в ряд и почленно возьмем обратное преобразование

$$L^{-1}(p^\nu) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} t^{-\nu-1} \quad [3, \text{с. 252}].$$

Лапласа, воспользовавшись формулой

Получим

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{1}{2\lambda} p^{-(\alpha/2)} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda} p^{\alpha/2}\right) \right] &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{|x|}{\lambda}\right)^m \frac{t^{\alpha(1-m)/2-1}}{\Gamma(\alpha(1-m)/2)} = \\ &= \frac{1}{2\lambda} t^{(\alpha/2)-1} \Phi\left(-\frac{|x|}{\lambda} t^{-\alpha/2}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{1}{2\lambda} p^{-(\alpha/2)+1} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda} p^{\alpha/2}\right) \right] &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{|x|}{\lambda}\right)^m \frac{t^{\alpha(1-m)/2-2}}{\Gamma(\alpha(1-m)/2-1)} = \\ &= \frac{1}{2\lambda} t^{(\alpha/2)-2} \Phi\left(-\frac{|x|}{\lambda} t^{-\alpha/2}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}-1\right), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Phi(z; \beta, \gamma)$ – специальная функция Райта [4]:

$$\Phi(z; \beta, \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\beta k + \gamma)} \frac{z^k}{k!}. \quad (17)$$

Таким образом, решение задачи типа Коши (1) – (3) получается в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\lambda} t^{(\alpha/2)-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(-\frac{|x-\tau|}{\lambda} t^{-\alpha/2}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) f_1(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\lambda} t^{(\alpha/2)-2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(-\frac{|x-\tau|}{\lambda} t^{-\alpha/2}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}-1\right) f_2(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн. 1987.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М. 1961.
3. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М. 1977.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. 1967.

ПУТИ И УСЛОВИЯ ГУМАНИТАРИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Т. О. Доникова

Гуманитаризация – это принцип реформирования системы образования, который предполагает увеличение в учебных планах и программах объема социально-гуманитарных дисциплин, включение гуманитарных знаний в содержание учебных предметов естественнонаучного цикла, что способствует развитию у обучающихся гуманитарного мышления, формированию у них целостной картины мира.

Гуманитаризация образования предполагает отношение к ученику как к субъекту учебной деятельности: педагогам следует нацелить свои усилия на развитие творческих способностей каждого ученика, создание условий для становления их сущностных, природных сил, освоения общечеловеческих ценностей, развития духовной культуры. В процессе гуманитаризации обучения ученик познает не только законы природы, общества, но и самого себя, своей уникальной человеческой сущности, своей истории и своего нынешнего состояния, своей психологии и закономерностей формирования собственной личности. Познание отношений