Отметим, что запись вида (9) подтолкнула нас к идее реорганизации вычислений в традиционных пошаговых методах в соответствии с правой частью формулы (8), что позволяет преодолевать некоторые вычислительные трудности в задачах с разнохарактерным поведением составляющих решения.


**Литература**

1. *Бобков В. В., Кучмиенко И. А.* Методы численного решения задачи Коши, основанные на приближениях типа Пикара // Сб. трудов 59-й научн. конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета: в 3 частях, ч.1. БГУ, 2002. С. 74–78.
2. *Бобков В. В., Кучмиенко И. А.* Численное решение жестких систем с использованием методов гармонического анализа // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, 2003. №3. С. 90–93.
3. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.


# КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ


**П. В. Макевич**


Данная работа посвящена исследованию возможности построения эффективной процедуры, объединяющей достоинства адаптивного метода ([1]) и метода Кармаркара ([2]), для решения задачи линейного программирования (ЛП) в следующей формулировке:

$$\begin{array}{l} c'x \to \max \\ Ax \le b \end{array}, \qquad (1)$$

где $c$ – $n$-вектор, $b$ – $m$-вектор, $A$ – матрица $mxn$ полного ранга с большим количеством нулевых элементов, причем $m \ge n$ и $c \ne 0$. На практике для элементов x могут вводиться прямые ограничения $d_{*j} \le x_j \le d^*_j$, $d_{*j}$, $d^*_j \in \mathfrak{R}^n$.

Случай $n>m$ можно свести к (1), если перейти к двойственной задаче:

$$\begin{array}{l} -b'y \to \max \\ -A'y \le -c \end{array}.$$

Интерес к задачам ЛП значительно возрос после Второй Мировой войны. Уже в конце сороковых появились первые работы по симплекс-методу ([3]), и с тех пор этот алгоритм является одним из самых известных и популярных. Геометрически итерации симплекс-метода представляют собой переход между вершинами множества планов в направлении возрастания целевой функции.

В 70-х годах в Белгосуниверситете был предложен и тщательно протестирован **адаптивный метод** ([1]), как естественное обобщение симплекс-метода. На итерациях адаптивного метода уже могут использоваться любые точки множества планов, в том числе и внутренние. Результаты численных экспериментов свидетельствовали о том, что по эффективности и удобству адаптивный метод значительно превосходит стандартный симплекс-метод для некоторых классов задач.

Основополагающее понятие адаптивного метода – понятие опоры, естественное обобщение понятия «базис» из симплекс-метода. Опора – есть пара множеств индексов $K_{оп}=(I_{оп}, J_{оп})$, такая, что часть матрицы $A$, составленная из строк из $I_{оп}$ и столбцов из $J_{оп}$ – невырожденная. С целью повышения эффективности метода на каждой итерации пересчитывается не только текущий план, но и опора.

**Метод Кармаркара** опубликован в 1984-ом году ([2]). Главная идея данного метода заключается в построении вектора приращения текущего плана как проекции градиента целевой функции на допустимое множество. Метод Кармаркара относится к классу методов внутренней точки и является полиномиальным: все планы, получаемые на итерациях, лежат строго внутри допустимого множества. В основе метода лежит специальный проективный алгоритм Кармаркара. Начиная с некоторого плана $x_o$, данный алгоритм строит последовательность *внутренних* точек множества планов задачи (1). При этом значение целевой функции улучшается на каждой итерации.

Исследования в области линейного программирования продолжаются до сих пор и не теряют своей актуальности.

Предложенный нами **комбинированный метод** представляет собой попытку объединения достоинств методов внутренней точки (метод Кармаркара) и опорных методов (адаптивный метод). Известно (например, [4]), что на первых итерациях методы внутренней точки показывают более высокую скорость сходимости (т.е. приращение целевой функции в единицу времени), чем опорные, а затем замедляются. Проведенные нами численные эксперименты подтверждают такой результат (см. таблицу). Опорные же методы двигаются относительно равномерно и на первых, и на последних итерациях.

Комбинированный метод представляет собой интеллектуальную процедуру, в которой на первых итерациях используется метод Кармаркара, а затем происходит переключение на адаптивный метод.

Приведем некоторые преимущества указанного подхода:

• Алгоритмы используются в те моменты, когда они дают максимальное приращение в единицу времени – основное преимущество.

• Снимается вопрос об эвристическом критерии остановки алгоритма Кармаркара – как известно, для адаптивного метода получены строгие критерии оптимальности и субоптимальности.

• Теоретически можем получить точное решение (в отличие от метода Кармаркара).

• В ходе работы метода Кармаркара растет число обусловленности матрицы $A'D^{-2}A$, что делает неэффективным применение некоторых численных методов нахождения обратной матрицы. В комбинированном методе эта проблема не так существенна.

• Уменьшается опасность выхода текущей точки на границу в методе Кармаркара. Следовательно, можем использовать бо́льший параметр безопасности $\gamma$.

Известно, что при работе адаптивного алгоритма на каждой итерации улучшается не только план, но и текущая опора. Тогда как в комбинированном методе подпрограмма метода Кармаркара передает адаптивному методу только хороший начальный план, но не опору. Поэтому часто адаптивный метод работает несколько медленнее, являясь частью комбинированного метода, чем сам по себе. В этом – основной недостаток комбинированного метода по сравнению с адаптивным.

Только численные эксперименты могут показать, какой из указанных двух факторов (хороший начальный план или плохая опора) для данного класса задач ЛП окажется более весомым. В качестве средства реализации численных экспериментов был выбран язык программирования C++. Для тестирования использовался ПК с процессором Celeron-800 и ОЗУ 128 Мб. Поскольку исследовалась задача ЛП специального вида (1), был подобран и соответствующий способ хранения матриц.

Рассмотрим один из проведенных экспериментов, который наглядно показывает поведение методов до и после момента переключения между процедурами метода Кармаркара и адаптивного метода. При помощи трех описываемых в работе методов было решено 10 задач вида (1), где $m = 8000$, $n = 100$, матрица $A$ содержит 15 % ненулевых элементов. Время дано в секундах.

Из приведенной ниже таблицы видно, что до момента переключения метод Кармаркара работал значительно быстрее адаптивного метода, а после уже адаптивный метод выглядит лучше как метода Кармаркара, так и комбинированного метода. Под достижением адаптивным методом момента переключения в данном случае подразумевается первая итерация, на которой получено значение целевой функции не меньше значения целевой функции комбинированного метода в момент переключения.

*Таблица*

| | Полное время работы | | | Время до переключения | | | Время после переключ. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Кармар. | Адаптив. | Комбин. | Кармар. | Адаптив. | Комбин. | Кармар. | Адаптив. | Комбин. |
| 1 | 169 | 179 | 153 | 54 | 108 | 54 | 115 | 71 | 99 |
| 2 | 208 | 214 | 176 | 106 | 204 | 106 | 102 | 10 | 70 |
| 3 | 158 | 186 | 157 | 76 | 136 | 76 | 82 | 50 | 81 |
| 4 | 209 | 198 | 180 | 106 | 188 | 106 | 103 | 10 | 74 |
| 5 | 167 | 158 | 141 | 75 | 121 | 75 | 92 | 37 | 66 |
| 6 | 179 | 165 | 165 | 85 | 139 | 85 | 94 | 26 | 80 |
| 7 | 210 | 152 | 175 | 117 | 139 | 117 | 93 | 13 | 58 |
| 8 | 189 | 238 | 156 | 94 | 218 | 94 | 95 | 20 | 62 |
| 9 | 189 | 312 | 189 | 81 | 267 | 81 | 108 | 45 | 96 |
| 10 | 182 | 199 | 150 | 67 | 131 | 67 | 115 | 68 | 83 |
| средн. | **186** | **200,1** | **164,2** | 86,1 | 165,1 | 86,1 | 99,9 | 35 | 76,9 |

Итак, в работе показано, что комбинированный метод является более гибким и эффективным, чем каждый из составляющих его методов в отдельности. Поскольку в общем случае представляется трудным априори определить, какой из методов (адаптивный или Кармаркара) лучше подходит для данной конкретной задачи, нам кажется важным подчеркнуть следующий результат: «комбинированный» метод всегда был быстрее *худшего* (по времени) из двух методов. В отдельных же случаях выигрыш даже по сравнению с *лучшим* из двух методов достигал порядка 12 % (см. таблицу).

**Литература**


1. *Альсевич В. В., Габасов Р. Ф., Глушенков В. С.* Оптимизация линейных экономических моделей: Статические задачи. Мн.: БГУ, 2000.
2. *Adler I., Karmarkar N., Resende M. G. C., Veiga G.* An implementation of karmarkar's algorithm for linear programming // Mathematical Programming - 44 (1989), p.297–335, 50 (1991), p.415.
3. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщения и приложения. М.: Прогресс, 1977.
4. *Xiong M., Wang J., Wang P.* Differential-Algebraic Approach to Linear Programming // Journal of Optimization Theory and Applications, vol.114, No.2,. 443–470, August 2002.