• выбираем точку (R_1^0, R_2^0), в которой значение целевой функции максимальное. Точка (R_1^0, R_2^0) и является решением исходной задачи об оптимальной налоговой политике в следующем смысле.

Всякая пара (R_1, R_2), удовлетворяющая ограничениям задачи (условиям устойчивости (4)–(7)) и достаточно близкая по норме точке (R_1^0, R_2^0) дает определенное приближение к оптимальному решению. Норма отклонения указанных двух точек определяет точность решения.

Для экономической модели рынка более двух конкурентов может быть сформулирована аналогичная задача. Сложность ее решения связана с нелинейным характером условий асимптотической устойчивости относительно исходных параметров системы. Проведенный анализ решенной задачи показывает, что для случая трех и более конкурентов решение аналогичной задачи в общем виде значительно сложнее. Тем не менее, следует отметить, что при фиксированных исходных значениях параметров такая задача есть известная задача нелинейного программирования.

Литература

1. *Калитин Б. С.* Модель второго порядка монопольного рынка. // Экономика. Управление. Право. 2004. № 2.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1996.

О СХОДИМОСТИ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. А. Кучмиенко

В работах [1], [2] предлагается ряд специальных методов решения задачи Коши

$$u'(x) = f\big(x, u(x)\big),\ u(t) = y,\ x \in \big[t, t+\tau\big],\ u \in G \subset R^n. \qquad (1)$$

Показывается, что использование любого из этих методов требует решения системы вида

$$Y = Y_0 + \tau\,\Omega\, F(Y). \qquad (2)$$

Форма (2) сходна с формой общих линейных методов, описанных в классической монографии [3]. Там же проводятся исследования сходимости этого класса методов, основанные на условиях порядка. Однако, не все из предлагаемых нами методов (вычислительно работоспособных)

удается исследовать по классической схеме. Это обстоятельство требует дополнительного исследования вопроса их сходимости.

Рассмотрим порождаемое методом (2) семейство задач, зависящих от m:

$$Y^{(m)} = Y_0 + \tau\,\Omega^{(m)}\,F(Y^{(m)}),\ m = 1, 2, \dots\ . \tag{3}$$

Для исследования сходимости решений $Y^{(m)}$ семейства (3) к точному решению $u(x)$ поставим вопрос в следующей, более общей, форме.

Пусть $I : X \to X$ – линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве X, отображение $\varphi : X \to X$ – такое, что для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|.$$

Рассмотрим уравнение для u

$$u = y + \tau\, I\,\varphi(u) \tag{4}$$

и совместно с ним семейство уравнений для y_m

$$y_m = y + \tau\, I_m\,\varphi(y_m),\ m = 1, 2, \dots\ , \tag{5}$$

где $I_m : X \to X$ – последовательность линейных ограниченных операторов. При каких условиях последовательность y_m сходится к u?

Утверждение 1. Пусть решение задачи (4) существует и единственно. Для существования и единственности решений y_m задачи (5) и сходимости их к решению u задачи (4) достаточно выполнения условий:

1. существует постоянная M такая, что $\|I_m\| \le M$ для любого m;
2. $\tau\, M\, L = \alpha < 1$;
3. на всех элементах $\bar{x}$ множества E, всюду плотного в X, имеет место сходимость $I_m\,\bar{x} \to I\,\bar{x}$.

Единственность решений задач (5) следует из сжимаемости отображения $\tau\, I_m\,\varphi$: $\|\tau\, I_m\varphi(x_1) - \tau\, I_m\varphi(x_2)\| \le \tau\, M\, L\|x_1 - x_2\|$. Для доказательства сходимости оценим норму ошибки:

$$\|u - y_m\| \le \tau(\|I\,\varphi(u) - I_m\varphi(u)\| + \|I_m\varphi(u) - I_m\varphi(y_m)\|) \le$$

$$\le \tau\|I\,\varphi(u) - I_m\varphi(u)\| + \tau\, M\, L\|u - y_m\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|u - y_m\| \le \frac{\tau}{1-\alpha}\|I\,\varphi(u) - I_m\varphi(u)\|.$$

Условий 1) и 3) достаточно для сильной сходимости I_m к I, поскольку для любого $x \in X$ верно

$$\|I \quad x - I_m x\| \le \|I \quad x - I \quad \bar{x}\| + \|I \quad \bar{x} - I_m \bar{x}\| + \|I_m \bar{x} - I_m x\| \le$$

$$\le \| \ I \ \| \ \frac{\varepsilon}{\| \ I \ \|} + \varepsilon + M \ \frac{\varepsilon}{M} = 3 \ \varepsilon \qquad ,$$

где $\bar{x} \in E$ выбран так, чтобы $\|x - \bar{x}\| \le \dfrac{\varepsilon}{\max(\| \ I \ \|, M)}$. Следовательно, $I_m \varphi(u) \to I \, \varphi(u)$, и значит, $y_m \to u$.

Отметим, что условия 1) и 3) являются также и необходимыми для сильной сходимости I_m к I (что непосредственно следует из теоремы Банаха-Штейнгауза).

Применим теперь утверждение 1 к уравнению

$$u(t + \tau x) = y + \tau \int_0^x f\big(t + \tau z, u(t + \tau z)\big) dz, \ x \in [0, 1], \tag{6}$$

и семейству уравнений (3). Пусть функция $f(x,u)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по переменной u. Тогда, как известно, уравнение (6) имеет единственное решение $u \in C[0, 1]$. Приближения $Y^{(m)}$ принадлежат пространству H_m сеточных функций, определенных лишь на конечном наборе точек $X_m = \{x_i^{(m)}\}$, $i = \overline{1, m}$. Норму в H_m зададим как максимум из норм значений сеточной функции во всех точках $x_i^{(m)}$:

$$\| Y^{(m)} \|_{H_m} = \max_{1 \le i \le m} \| y_i^{(m)} \|.$$

Введем следующие операторы:

оператор следа $D_m : C[0, 1] \to H_m$ ставит в соответствие функции v сеточную функцию v_m, совпадающую на сетке X_m с v;

оператор кусочно-линейной интерполяции $L_m : H_m \to C[0, 1]$ ставит в соответствие сеточной функции v_m функцию v такую, что на отрезках $[x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}]$, $i = \overline{0, m}$, функция v линейна (введены два вспомогательных узла $x_0^{(m)} = 0$, $x_{m+1}^{(m)} = 1$), в точках $x_i^{(m)}$, $i = \overline{1, m}$, ее значения совпадают со значениями v_m и дополнительно $v(x_0^{(m)}) = v(x_1^{(m)})$, $v(x_{m+1}^{(m)}) = v(x_m^{(m)})$;

Операторы D_m и L_m линейны, причем $\| D_m \| = \| L_m \| = 1$.

Перепишем уравнение (6) в виде

$$u = y + \tau I \varphi(u), \tag{7}$$

где $(I v)(x) = \int_0^x v(\alpha)\, d\alpha$, $\varphi(u)(\alpha) = f(t + \tau\alpha, u(\alpha))$, а вместо совокупности уравнений (3) будем рассматривать уравнения

$$y_m = y + \tau I_m \varphi(y_m), \; m = 1, 2, \ldots .$$

Здесь $I_m = L_m \Omega^{(m)} D_m$ (отметим, что $\| I_m \| = \left\| \Omega^{(m)} \right\|_\infty$).

Поскольку $L_m Y^{(m)} = y_m$, то для равномерной сходимости последовательности функций $L_m Y^{(m)}$, построенных на решениях уравнений (3), к решению u уравнения (7), достаточно выполнения условий 1)-3) утверждения 1, причем первое условие можно заменить эквивалентным ему $\left\| \Omega^{(m)} \right\|_\infty \le M$.

Применим теперь этот вывод для получения условий сходимости к точному решению приближений, вычисляемых с помощью интерполяционного подхода, описанного в [1]. Пусть интерполяция проводится по системе алгебраических многочленов x^k, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда для решений $Y^{(m)}$ уравнений (6) справедливо

Утверждение 2. Если величина $\Delta_m = \max\limits_{0 \le i \le m} \left| x_{i+1}^{(m)} - x_i^{(m)} \right|$ стремится к нулю, а последовательность матричных норм $\left\| \Omega^{(m)} \right\|_\infty$ ограничена, то последовательность приближений $L_m Y^{(m)}$ сходится к точному решению $u(x)$ уравнения (6) (с непрерывной липшицевой по второму аргументу функцией $f(x, u)$) при всех достаточно малых шагах τ.

Заметим, что для любого $k \ge 0$ и любого $m > k$ верно равенство $I_m(x^k) = L_m D_m I(x^k)$ (что следует из условий интерполяции). Учитывая полноту системы $\{x^k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, в пространстве $C[0, 1]$, осталось показать, что для всех k выполняется $L_m D_m I(x^k) \to I(x^k)$. Это следует из непрерывности функции $I(x^k)$ и условия $\Delta_m \to 0$, поскольку для любой функции $w \in C[0, 1]$ верно

$$\max_{0\le x\le 1} \left|L_m D_m w(x) - w(x)\right| \le$$

$$\le \max_{0\le i\le m} \max_{x_i^{(m)}\le x\le x_{i+1}^{(m)}} \max_{0\le\alpha\le 1} \left| \alpha \quad w(x_i^{(m)}) - \alpha \quad w(x) + (1-\alpha) w(x_{i+1}^{(m)}) - (1-\alpha) w(x) \right| \le$$

$$\le \max_{0\le i\le m} \max_{x_i^{(m)}\le x\le x_{i+1}^{(m)}} \max_{0\le\alpha\le 1} \alpha \quad \varepsilon + (1-\alpha) \quad \varepsilon = \varepsilon$$

Здесь m выбрано так, чтобы $\Delta_m \le \delta$ и для любых x_1, x_2, $\left|x_1 - x_2\right| \le \delta$, было $\left|w(x_1) - w(x_2)\right| \le \varepsilon$ (использована равномерная непрерывность).

Таким образом, условие равномерной ограниченности последовательности $\left\|\Omega^{(m)}\right\|$ является достаточным для сходимости интерполяционного метода. Отметим, что существуют наборы узлов, для которых последовательность $\left\|\Omega^{(m)}\right\|$ не является ограниченной: например, взяв равноотстоящие узлы, в последних строчках матриц $\Omega^{(m)}$ будем иметь коэффициенты квадратурных формул Ньютона-Котеса, не ограниченные, как известно, в совокупности.

Используем теперь утверждение 1, к примеру, для доказательства сходимости пошаговой реализации неявного метода трапеций. Пусть сеточные решения $Y^{(m)} = \begin{bmatrix} y_0 & \dots & y_m \end{bmatrix}^T$ вычисляются по формулам

$$y_i = y_{i-1} + \frac{\tau}{2m}(f_{i-1} + f_i) = y_0 + \frac{\tau}{m}(\frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{i-1} f_k + \frac{1}{2} f_i),\ i = \overline{1, m}. \qquad (8)$$

Тогда уравнения (3) примут вид

$$Y^{(m)} = Y_0 + \frac{\tau}{m} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1/2 \end{bmatrix} F(Y^{(m)}). \qquad (9)$$

Очевидно, что в этом случае $\left\|\Omega^{(m)}\right\|_\infty = 1$. В качестве полной в $C[0,1]$ системы, на которой требуется сильная сходимость $I_m \to I$, снова выберем систему $\{x^k\}$. На этой системе сильная сходимость имеет место, поскольку для любых k, m выполняется равенство $I_m(x^k) = I(L_m D_m x^k)$. По доказанному выше $L_m D_m x^k \to x^k$, и, следовательно, $I_m(x^k) \to I(x^k)$.

Отметим, что запись вида (9) подтолкнула нас к идее реорганизации вычислений в традиционных пошаговых методах в соответствии с правой частью формулы (8), что позволяет преодолевать некоторые вычислительные трудности в задачах с разнохарактерным поведением составляющих решения.

Литература

1. *Бобков В. В., Кучмиенко И. А.* Методы численного решения задачи Коши, основанные на приближениях типа Пикара // Сб. трудов 59-й научн. конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета: в 3 частях, ч.1. БГУ, 2002. С. 74–78.
2. *Бобков В. В., Кучмиенко И. А.* Численное решение жестких систем с использованием методов гармонического анализа // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, 2003. №3. С. 90–93.
3. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

П. В. Макевич

Данная работа посвящена исследованию возможности построения эффективной процедуры, объединяющей достоинства адаптивного метода ([1]) и метода Кармаркара ([2]), для решения задачи линейного программирования (ЛП) в следующей формулировке:

$$\begin{matrix} c'x \to \max \\ Ax \le b \end{matrix}, \qquad (1)$$

где c – n-вектор, b – m-вектор, A – матрица mxn полного ранга с большим количеством нулевых элементов, причем $m \ge n$ и $c \ne 0$. На практике для элементов x могут вводиться прямые ограничения $d_{*j} \le x_j \le d^*_j$, d_{*j}, $d^*_j \in \Re^n$.

Случай $n>m$ можно свести к (1), если перейти к двойственной задаче:

$$\begin{matrix} -b'y \to \max \\ -A'y \le -c \end{matrix}.$$

Интерес к задачам ЛП значительно возрос после Второй Мировой войны. Уже в конце сороковых появились первые работы по симплекс-методу ([3]), и с тех пор этот алгоритм является одним из самых известных и популярных. Геометрически итерации симплекс-метода представляют собой переход между вершинами множества планов в направлении возрастания целевой функции.

В 70-х годах в Белгосуниверситете был предложен и тщательно протестирован **адаптивный метод** ([1]), как естественное обобщение сим-