

- доля парето-оптимальных решений задачи  $Z(c^1, c^2, c^3)$  порядка  $n$ ,  $n \geq 100$ , находимых посредством алгоритма  $\alpha$ , составляет не менее 71 %, если  $r=2$  и не менее 60%, если  $2 < r \leq n^{(1-\theta)/3}$ ,  $1/4 < \theta < 1$ , причем с ростом  $n$  их доля увеличивается;

- доля парето-оптимальных решений задачи  $Z(c^1, c^2, c^3, c^4)$  порядка  $n$ ,  $n \geq 250$ , находимых посредством алгоритма  $\alpha$ , составляет не менее 99 %, если  $r=2$  и не менее 81 %, если  $2 < r \leq n^{(1-\theta)/4}$ ,  $1/5 < \theta < 1$ , причем с ростом  $n$  их доля увеличивается;

- доля парето-оптимальных решений задачи  $Z(c^1, c^2, \dots, c^q)$  порядка  $n$ , находимых посредством алгоритма  $\alpha$ , при фиксированном  $n$  монотонно убывает с увеличением  $q$ .

Так как доля парето-оптимальных решений задачи  $Z(c^1, c^2, \dots, c^q)$  порядка  $n$ , находимых посредством алгоритма  $\alpha$ , увеличивается с ростом  $n$  и уменьшается с ростом  $q$  (так, например, при  $n=250$  и  $q=4$  она составляет не менее 99 %, если  $r=2$ , и не менее 81 %, если  $2 < r \leq n^{(1-\theta)/4}$ ,  $1/5 < \theta < 1$ ), то данный алгоритм может быть применен на практике для решения  $(q,3)$ -аксиальной ПВ порядка  $n \geq 250$  с малым числом  $q$  критериев.

#### Литература

1. *Arbib C., Pacciarelli D., Smriglix S.* A three-dimensional matching model for perishable production scheduling // *Discrete Applied Mathematics*. 1999. V92. P.1–15.
2. *Кравцов М. К., Крачковский А. П.* Полиномиальный алгоритм для многокритериальной многоиндексной аксиальной проблемы выбора. // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* 2001. № 1. С. 120–123.

### РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Е. Л. Зюзина

Проблема разработки новых вычислительных методов на неравномерных сетках, как по пространству, так и по времени является весьма актуальной, так как правильный выбор расчетной адаптивной сетки позволяет существенно снизить затраты машинного времени при реализации численных алгоритмов на ЭВМ. С точки зрения моделирования реальных физических процессов важным свойством является консервативность метода, то есть выполнение сеточных аналогов законов

сохранения. При переходе от равномерных сеток к неравномерным порядок локальной аппроксимации обычно уменьшается [1]. Повышение точности разностного метода без увеличения шаблона можно осуществить за счет аппроксимации исходного дифференциального уравнения не в узлах сетки, а в некоторых промежуточных точках расчетной области [2–5]. Разностные схемы для параболических и гиперболических уравнений на неравномерных по пространству сетках достаточно хорошо изучены [1,2]. Для трехслойных операторно-разностных схем на неравномерных сетках по времени в работе [3] были получены априорные оценки устойчивости по начальным данным и правой части. Однако, приведенные в [3] конкретные вычислительные алгоритмы повышенного порядка точности не удовлетворяют условию консервативности. В [5] на неравномерной сетке по пространству и времени построена не дивергентная разностная схема 2-го порядка точности.

В данной работе для одномерного волнового уравнения предлагаются новые консервативные разностные схемы второго порядка локальной аппроксимации и сходимости на неравномерной пространственно-временной сетке. Для предложенных вычислительных алгоритмов получены априорные оценки устойчивости и сходимости по начальным данным и правой части.

Пусть в области  $\bar{Q} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$  требуется найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую начально-краевой задаче:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (3)$$

В области  $\bar{Q}$  введем неравномерную сетку по пространству и времени:

$$\hat{\omega}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l\}, \quad (4)$$

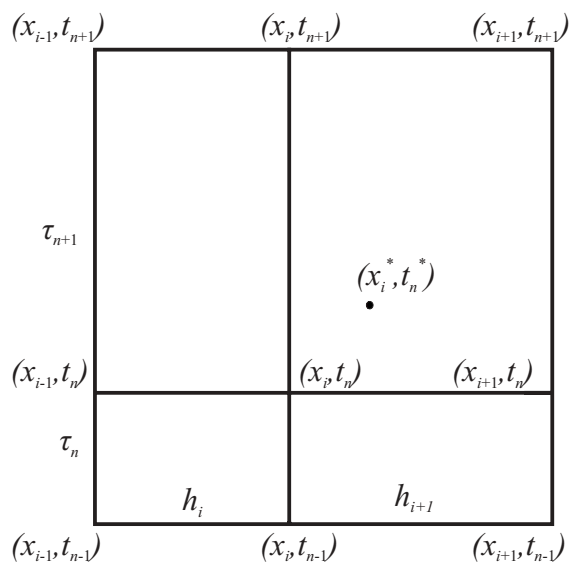


Рис. 1. Неравномерный шаблон

$$\hat{\omega}_\tau = \{t_n = t_{n-1} + \tau_n, \quad n=1,2,\dots,N_0, \quad t_0 = 0, \quad t_{N_0} = T\}, \quad (5)$$

$$\hat{\omega}_{h\tau} = \hat{\omega}_h \times \hat{\omega}_\tau. \quad (6)$$

Аппроксимируем дифференциальную задачу (1)–(3) на сетке  $\hat{\omega}_{h\tau}$  трехслойной консервативной разностной схемой с весами:

$$y_{\bar{t}\bar{t}} + \left( (h^2/6) y_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}} \right)_{\hat{x}} = y_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi, \quad (x, t) \in \hat{\omega}_{h\tau}, \quad (7)$$

$$y(0) = u_0(x), \quad y_t(0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad (8)$$

$$y_0^{n+1} = 0, \quad y_N^{n+1} = 0, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad (9)$$

где второе начальное условие аппроксимируется со вторым порядком:

$$\tilde{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0.5\tau_1(Lu_0 + f(x, 0)) + O(\tau_1^2), \quad Lu_0 = u_0''(x).$$

Здесь используются стандартные обозначения теории разностных схем [1]:

$$y = y(x_i, t_n), \quad \bar{h}_i = 0.5(h_{i+1} + h_i), \quad \tau_n^* = 0.5(\tau_{n+1} + \tau_n), \quad y^{(0.5)} = 0.5(y^{n+1} + y^n),$$

$$y_{t,n} = (y^{n+1} - y^n) / \tau_{n+1}, \quad y_{\bar{t},n} = (y^n - y^{n-1}) / \tau_n, \quad y_{\bar{t}\bar{t},n} = (y_t - y_{\bar{t}}) / \tau_n^*,$$

$$y_{t,n}^* = (y^{n+1} - y^{n-1}) / 2\tau_n^*, \quad y_{x,i} = (y_{i+1}^n - y_i^n) / h_{i+1}, \quad y_{\bar{x},i} = (y_i^n - y_{i-1}^n) / h_i,$$

$$y_{\bar{x}\bar{x},i} = (y_{x,i} - y_{\bar{x},i}) / \bar{h}_i, \quad y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 y^{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y^n + \sigma_2 y^{n-1},$$

$$y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = y + (\sigma_1 \tau_{n+1} - \sigma_2 \tau_n) y_t^* + 0.5(\sigma_1 + \sigma_2) \tau_n \tau_{n+1} y_{\bar{t}\bar{t}}.$$

Несложно показать, что относительно нерасчетного узла  $(\bar{x}_i, \bar{t}_n)$ :

$$\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i + x_{i+1}) / 3 = x_i + (h_{i+1} - h_i) / 3, \quad (10)$$

$$\bar{t}_n = (t_{n-1} + t_n + t_{n+1}) / 3 = t_n + (\tau_{n+1} - \tau_n) / 3, \quad (11)$$

при условиях:

$$\sigma_1 \tau_{n+1} - \sigma_2 \tau_n = (\tau_{n+1} - \tau_n) / 3, \quad \varphi = f(\bar{x}, \bar{t}), \quad (12)$$

разностная схема (7)–(9) аппроксимирует дифференциальную задачу (1)–(3) со вторым порядком  $O(\bar{h}_i^2 + (\tau_n^*)^2)$  на стандартном девяти точечном шаблоне (Рис.1).

Исследование устойчивости предложенной разностной схемы второго порядка аппроксимации проведем с помощью теории устойчивости операторно-разностных схем. Рассмотрим трехслойную операторно-разностную схему на неравномерной пространственно-временной сетке, записанную в каноническом виде:

$$D y_{\bar{t}} + B y_t + A y = \varphi, \quad y_0 = u_0, \quad y_1 = u_1, \quad (13)$$

$D, B, A$  – линейные операторы, действующие в гильбертовом пространстве  $H$  с введенными скалярным произведением и нормой:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} \hbar_i u_i v_i, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N h_i u_i v_i, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u]},$$

$y \in H$  – искомая функция, а  $\varphi, u_0, u_1 \in H$  – заданы.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия:

$$D = D^* > 0, \quad A = A^* > 0, \quad R = D - \frac{\tau_n \tau_{n+1}}{4} A > 0, \quad B \geq \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{4} A, \quad \tau_{n+1} \geq \tau_n, \quad (14)$$

$R, A$  – постоянные операторы. Тогда разностная схема (13) устойчива по начальным данным, правой части и верна априорная оценка:

$$\|y_{t,n}\|_R + \|y_n^{(0.5)}\|_A \leq \sqrt{2} \left( \|y_t(0)\|_R + \|y_0^{(0.5)}\|_A \right) + \sum_{k=1}^n \tau_{k+1} \|\varphi_k\|_{R^1}. \quad (15)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия:

$$\sigma_1 = \sigma_1^* = \frac{2\tau_{n+1} + \tau_n}{6(\tau_{n+1} + \tau_n)}, \quad \sigma_2 = \sigma_2^* = \frac{\tau_{n+1} + 2\tau_n}{6(\tau_{n+1} + \tau_n)}, \quad 3h_{i+1} - h_i > 0, \quad \tau_{n+1} \geq \tau_n, \quad (16)$$

тогда консервативная разностная схема (7)–(9) устойчива по начальным данным, правой части и верна априорная оценка (15), где  $\|y_t\|_R^2 = \|y_t\|^2 - \left( h_i^2 / 6, y_{\bar{x}}^2 \right) > 0$ .

*Доказательство.* Применим теорему 1. Приведем схему (7)–(9) к каноническому виду (13):  $D = E + A_1 + 0.5(\sigma_1 + \sigma_2)\tau_n\tau_{n+1}A$ ,  $B = ((\tau_{n+1} - \tau_n)/3)A$ ,  $(A_1 y)_i = \left( (h_i^2 / 6) y_{\bar{x}} \right)_{\hat{x}, i}$ ,  $(A y)_i = -y_{\bar{x}\bar{x}, i}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $y_0 = y_N = 0$ . Проверяя выполнение операторных неравенств (14), получаем следующие условия:  $\sigma_1\tau_{n+1} - \sigma_2\tau_n = (\tau_{n+1} - \tau_n)/3$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 = 0.5$ ,  $h_i\hbar_i/4 - h_i^2/6 > 0$ ,  $\tau_{n+1} \geq \tau_n$ , из которых легко получаем (16).

*Замечание 1.* Из условия  $h_i\hbar_i/4 - h_i^2/6 > 0$  следует, что если пространственная сетка строится по закону геометрической прогрессии  $h_{i+1} = qh_i$ , то константа  $q$  должна удовлетворять условию  $1/3 \leq q \leq 3$ . При  $1/3 \leq q < 1$  сетка сгущается, а при  $1 < q \leq 3$  – разбегается.

*Замечание 2.* При ограничениях (16) схема (7) принимает вид:

$$y_{\bar{t}\bar{t}} + \left( (h_i^2 / 6) y_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}} \right)_{\hat{x}} + (\tau_n \tau_{n+1} / 4) A y_{\bar{t}\bar{t}} + ((\tau_{n+1} - \tau_n) / 3) A y_{\bar{t}} + A y = \varphi, \quad (17)$$

и можно уточнить априорную оценку (15):

$$\|y_{t,n}\|_R + \|y_n^{(0.5)}\|_A \leq \sqrt{2} \left( \|y_t(0)\|_R + \|y_0^{(0.5)}\|_A \right) + \sum_{k=1}^n \tau_{k+1} \|\varphi_k\|. \quad (18)$$

Учитывая погрешность аппроксимации и оценку устойчивости (18), легко убедиться, что предложенная разностная схема сходится к точному решению исходной дифференциальной задачи со вторым порядком:  $O(\hbar^2 + (\tau^*)^2)$ .

*Замечание 3.* Выбирая  $\sigma_1^*$ ,  $\sigma_2^*$  согласно (16), можно аппроксимировать дифференциальное уравнение (1) разностной схемой, записанной в не дивергентном виде:  $y_{\bar{t}\bar{t}} + ((h_{i+1} - h_i) / 3) y_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}} = y_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma_1^*, \sigma_2^*)} + \varphi$ . Если пространственная сетка выбирается равномерной, то схема второго порядка точности для дифференциальной задачи (1)–(3) имеет вид:  $y_{\bar{t}\bar{t}} = y_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma_1^*, \sigma_2^*)} + \varphi$ .

### Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998. 442 с.
3. Matus P., Zyuzina E. Three-level difference schemes on non-uniform in time grids // Comput. Meth. Appl. Math. 2001. № 3. P 265–284.
4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. Разностные схемы повышенного порядка точности на неравномерных сетках // Дифференц. уравнения. 1996. № 2. С. 265–274.
5. Matus P., Mazhukin V., Mozolevsky I. Stability of finite difference schemes on non-uniform spatial-time grids // Proc. of the Numerical Analysis and Applications Conference. Rouse, Bulgaria, 2000.

## СИСТЕМА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЙ РАСПОЗНАВАНИЯ ЛИЦ «OCULUS»

Е. В. Коблов

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкое распространение получают биометрические системы идентификации человека [1]. Их достоинство состоит в том, что они позволяют автоматизировать многие процессы, которые раньше производились вручную, такие как поиск подозреваемого в базе