ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА

С. А. Дичковская

В [1] сформулированы задачи распределения капиталовложений, размещения производств, идентификации параметров модели по эмпирическим данным, запуска метеорологических спутников с поверхности земли на разные атмосферные уровни сводящиеся к q-критериальной ($q \geq 2$) трехиндексной аксиальной проблеме выбора ((q,3)-аксиальной ПВ) порядка n, постановка которой предполагает, что на множестве допустимых решений $X=\{x=\left\| x_{ijk} \right\| : x_{ijk}=0$ или $1 \;\; \forall (i,j,k)\in N_n^3, \;\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk}=1$ $\forall \;\; k\in N, \;\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}=1 \;\; \forall j\in N_n, \;\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}=1 \;\;\; \forall i\in N_n\}$ определена векторная целевая функция $f(x)=(f_1(x), f_2(x),\ldots, f_q(x))$ с линейными критериями $f_t(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk}^t x_{ijk} \rightarrow \min\limits_X \;\; \forall t\in N_q$, где $N_n=\{1,2,\ldots,n\}$, $N_n^3=N_n\times N_n\times N_n$, $c^t=\left\| c_{ijk}^t \right\|_n \;\; \forall t\in N_q$,– заданные матрицы с действительными элементами. В дальнейшем такую задачу будем обозначать через $Z(c^1, c^2,\ldots, c^q)$. Заметим, что задача $Z(c^1, c^2,\ldots, c^q)$ при q=1 превращается в однокритериальную трехиндексную аксиальную проблему выбора, которая является NP-полной.

В [3] при некоторых дополнительных условиях на коофициенты целевых функций предложен и обоснован полиномиальный алгоритм α нахождения так называемого асимптотически оптимально-компромиссного решения (q, p)-аксиальной ПВ, т.е. такого решения, векторная оценка которого при увеличении размерности задачи стремится (в смысле относительной погрешности) к идеальной точке, координаты которой представляют собой оптимальные значения целевых функций соответствующих однокритериальных задач.

В настоящей работе этот алгоритм программно реализован на языке Object Pascal (в среде Delphi) и проведены его вычислительные эксперименты на тестовых задачах, для которых матрицы (c^1, c^2,..., c^q) задавались посредством генератора случайных чисел, настроенного на работу с целыми числами из отрезка $[1,r]$ (с использованием компьютера Atlon900, 256 Mb RAM, OC Windows 98).

Алгоритм α нахождения приближенного решения задачи $Z(c^1, c^2,\ldots, c^q)$ состоит из двух этапов.

Этап 1. Находим матрицу c^*, элементы которой определяются по формуле $c^*_{ijk} = \sum_{t=1}^{q} c^t_{ijk} \quad \forall (i,j,k) \in N_n^3$.

Этап 2. Состоит из последовательно проводимых шагов.

Шаг 1. Находим минимальный элемент матрицы c^*, если их несколько, то берем любой из них. Пусть таким элементом оказался $c^*_{i_1^0 j_1^0 k_1^0}$. Тогда полагаем $x^*_{i_1^0 j_1^0 k_1^0} = 1$, $x^*_{i_1^0 jk} = 0 \ \forall \ j,k \in N_n$, $x^*_{ij_1^0 k} = 0 \ \forall \ i,k \in N_n$, $x^*_{ijk_1^0} = 0$ $\forall \ i,j \in N_n$. Вычеркиваем элементы $c^*_{i_1^0 jk} \ \forall \ j,k \in N_n$, $c^*_{ij_1^0 k} \ \forall \ i,k \in N_n$, $c^*_{ijk_1^0} \ \forall \ i,j \in N_n$. В результате выполненных операций получаем подматрицу $c^{(1)}$ матрицы c^*. Всего необходимо сделать n шагов этого процесса. В результате получаем некоторый план x^* задачи $Z(c^1, c^2,\ldots, c^q)$. Легко видеть, что трудоемкость алгоритма α составляет $O(n^4)$ действий.

Пусть $V(n,q,r)$ –множество всех наборов матриц $(c^1, c^2,\ldots, c^q)$, элементы каждой из которых равновероятно и независимо принимают целочисленные значения из отрезка $[1,r]$, где $r = r(n)$ — либо константа, либо $r(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, а $V^{\beta}(n,q,r)$ –множество всех тех наборов матриц из множества $V(n,q,r)$, которые обладают свойством β. Будем говорить, что почти каждый набор матриц множества $V(n,q,r)$ обладает свойством β, если $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|V^{\beta}(n,q,r)\right|}{\left|V\ (n,q,r)\right|} = 1$.

Будем также говорить, что алгоритм α почти всегда строит асимптотически оптимально-компромиссный план x^* $(q,3)$-аксиальной ПВ, если для почти каждого набора матриц множества $V(n,q,r)$ существует такая последовательность $\varepsilon_n \ge 0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, что выполняются неравенства $f_j(x^*) \le f_j^0(1+\varepsilon_n) \ \forall j \in N_q$, где $f_j^0 = \min\{f_j(x) : x \in X\}$.

Теорема [3]. Алгоритм α почти всегда строит асимптотически оптимально-компромиссный план $(q,3)$-аксиальной ПВ, если $r^q \le n^{1-\theta}$, $1/(q+1) < \theta < 1$.

Решение x^* задачи $Z(c^1, c^2, ..., c^q)$ называется парето-оптимальным, если не существует такого решения $x^/$, для которого выполняются условия $f(x')\leq f(x^*)$, $f(x')\neq f(x^*)$.

Всего было решено 22000 задач. Нахождение парето-оптимальных решений осуществлялось исходя из следующего очевидного утверждения: если для некоторого решения x^* задачи $Z(c^1, c^2, ..., c^q)$ выполняются равенства $f_t(x^*) = n \quad \forall t \in N_q$, то оно является парето-оптимальным для $(q,3)$-аксиальной ПВ. Результаты проведенных вычислительных экспериментов представлены в таблице.

Из таблицы вытекает, что:

- доля парето-оптимальных решений задачи $Z(c^1, c^2)$ порядка n, $n \geq 50$, находимых посредством алгоритма α, составляет не менее 62 %, если r=2 и не менее 46%, если $2 < r \leq n^{(1-\theta)/2}$, $1/3 < \theta < 1$, причем с ростом n их доля увеличивается;

Таблица

Результаты вычислительных экспериментов на тестовых (*q*,3)-аксиальных ПВ, полученные с помощью приближенного алгоритма α

Номер серии задач	Количество критериев, q	Порядок задачи, n	Коэф-ты целевой функции, принадл. отрезку [1,r], r	Доля задач в серии, решаемых парето-оптимально с помощью алгоритма α, %
1	2	50	2	62
2		50	3	46
3		100	2	82
4		100	4	69
5		150	2	99
6		150	5	85
7		200	2	99
8		200	5	89
9		250	2	99
10		250	6	93
11	3	100	2	71
12		100	3	60
13		150	2	82
14		150	3	66
15		200	2	96
16		200	3	69
17		250	2	99
18		250	3	72
19	4	150	2	56
20		200	2	77
21		250	2	99
22		250	3	81

• доля парето-оптимальных решений задачи $Z(c^1, c^2, c^3)$ порядка n, $n \geq 100$, находимых посредством алгоритма α, составляет не менее 71 %, если r=2 и не менее 60%, если $2 < r \leq n^{(1-\theta)/3}$, $1/4 < \theta < 1$, причем с ростом n их доля увеличивается;

• доля парето-оптимальных решений задачи $Z(c^1, c^2, c^3, c^4)$ порядка n, $n \geq 250$, находимых посредством алгоритма α, составляет не менее 99 %, если r=2 и не менее 81 %, если $2 < r \leq n^{(1-\theta)/4}$, $1/5 < \theta < 1$, причем с ростом n их доля увеличивается;

• доля парето-оптимальных решений задачи $Z(c^1, c^2, \ldots, c^q)$ порядка n, находимых посредством алгоритма α, при фиксированном n монотонно убывает с увеличением q.

Так как доля парето-оптимальных решений задачи $Z(c^1, c^2, \ldots, c^q)$ порядка n, находимых посредством алгоритма α, увеличивается с ростом n и уменьшается с ростом q (так, например, при n=250 и q=4 она составляет не менее 99 %, если r=2, и не менее 81 %, если $2 < r \leq n^{(1-\theta)/4}$, $1/5 < \theta < 1$), то данный алгоритм может быть применен на практике для решения (q,3)-аксиальной ПВ порядка $n \geq 250$ с малым числом q критериев.

Литература

1. *Arbib C., Pacciarelli D.,Smriglix S.* A three-dimensional matching model for perishable production scheduling // Discrete Applied Mathematics. 1999. V92. P.1–15.
2. *Кравцов М. К., Крачковский А. П.* Полиномиальный алгоритм для многокритериальной многоиндексной аксиальной проблемы выбора. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2001. № 1. С. 120–123.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Е. Л. Зюзина

Проблема разработки новых вычислительных методов на неравномерных сетках, как по пространству, так и по времени является весьма актуальной, так как правильный выбор расчетной адаптивной сетки позволяет существенно снизить затраты машинного времени при реализации численных алгоритмов на ЭВМ. С точки зрения моделирования реальных физических процессов важным свойством является консервативность метода, то есть выполнение сеточных аналогов законов