КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ

С. А. Береснев

1. ВВЕДЕНИЕ

При численном исследовании процессов гидромеханики в ограниченных объемах магнитной жидкости приходится решать сопряженную задачу о структуре магнитного поля. Внутри жидкости поле описывается нелинейными уравнениями Максвела, снаружи – линейными. На границе раздела магнитной и немагнитной сред ставятся условия непрерывности касательной составляющей напряженности и нормальной составляющей индукции. Наиболее эффективным методом решения линейных уравнений является метод граничных элементов, а нелинейных – метод конечных элементов.

Работа посвящена совместной реализации этих методов на примере цилиндрического слоя магнитной жидкости, помещенного в однородное магнитное поле.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоская капля магнитной жидкости, помещенная в однородное магнитное поле и окруженная немагнитным газом. Зависимость намагниченности жидкости от напряженности поля описывается интерполяционной формулой [1, с. 36]

$$M = M_{\infty} \frac{H}{H + H_*} \tag{1}$$

где M – намагниченность жидкости, M_{∞} – намагниченность насыщения жидкости; H – напряженность поля внутри капли; H_* – напряженность внутреннего поля, при котором $M(H_*) = 0.5M_{\infty}$. Индексами (1) и (2) будем обозначать функции, определенные внутри и вне капли соответственно. Безразмерная постановка задачи имеет вид

$$\nabla \cdot (\mu \nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0; \;\; 0 \le x < \infty, \;\; 0 \le y < \infty \tag{2}$$

$$u^{(1)}\big|_{\Gamma}=u^{(2)}\big|_{\Gamma}\,,\ \mu^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=\mu^{(2)}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\Big|_{\Gamma}\,; \qquad (3)$$

$$u(x,0)=0\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0; \qquad (4)$$

$$u^{(2)}\,|_{x,y\to\infty}=h_{\infty}y; \qquad (5)$$

где $u(x,y)$ – безразмерный потенциал поля; (3) – условия сопряжения; (4) – условия симметрии; (5) – условие невозмущенного магнитного поля на бесконечности; $h_{\infty}=H_0/H_*$; H_0 – напряженность внешнего магнитного поля на бесконечности; $\mu^{(1)}=1+\chi/(1+|\nabla u|)$, $\mu^{(2)}=1$; Γ – граница раздела, которая представляет собой окружность радиуса $R=1/\sqrt{\pi}$; χ – магнитная восприимчивость жидкости. Решение задачи (2) – (5) определяется параметрами χ и h_{∞}.

Особенность задачи в том, что она имеет точное решение

$$u^{(1)}=Ay\,,\ u^{(2)}=h_{\infty}y-\frac{(h_{\infty}-A)y}{\pi(x^2+y^2)},\ A=\frac{2h_{\infty}}{1+\mu}.$$

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Поскольку потенциал магнитного поля вне капли описывается двумерным уравнением Лапласа, фундаментальное решение которого известно, то для решения задачи во внешней области естественно воспользоваться методом граничных элементов [2, с. 74]. Для его применения введем замену $u^{(2)}(x,y)=\tilde{u}(x,y)+h_{\infty}y$. С учетом этой замены внешняя задача эквивалентна решению интегрального уравнения

$$\alpha\pi\tilde{u}(\xi)=\oint_{\Gamma}(\tilde{u}q^*-u^*\tilde{q})d\Gamma\,,\ \alpha=\begin{cases}1,\xi^0\in\Gamma\\ 2,\xi^0\notin\Gamma\end{cases} \qquad (6)$$

где u^* – фундаментальное решение уравнения Лапласа; $q^*=\partial u^*/\partial n$ – производная по нормали от фундаментального решения; $\tilde{q}=\partial\tilde{u}/\partial n$ – производная от неизвестной функции $\tilde{u}$; нормаль n является внешней к контуру Γ.

Так как магнитное поле внутри капли описывается нелинейным уравнением, то для нахождения внутреннего потенциала $u^{(1)}$ применяется метод конечных элементов. Конечно-элементная схема для нелинейного уравнения (2) строилась интегро-интерполяционным методом.

Результатом применения методов конечных и граничных элементов является система алгебраических уравнений для определения магнитного потенциала $u^{(1)}$ в узлах треугольной сетки, а также нормальной составляющей безразмерной напряженности внешнего поля $q^{(2)}$ в средних точках между граничными узлами. Система решалась с помощью итерационной процедуры, на каждой итерации которой к системе, полученной граничными элементами, применяется метод Гаусса, а к системе конечно-элементных уравнений – одна итерация Зейделя.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рисунке показано распределение потенциала магнитного поля на границе раздела Г при $h_\infty = 10$, $\chi=8$. Линия соответствует точному решению, кружки – численные результаты, полученные на сетке с числом узлов 100 на четверти контура Г. Как видим, численное решение практически совпадает с точным: погрешность составляет менее 0,03 %. Приведенные результаты значительно превосходят по точности решение, полученное в случае, когда внешняя задача решается методом конечных, а не граничных элементов. Это объясняется, в частности тем, что метод граничных элементов обеспечивает точное соблюдение условий на бесконечности (5), а также не требует введения сетки во внешней области.

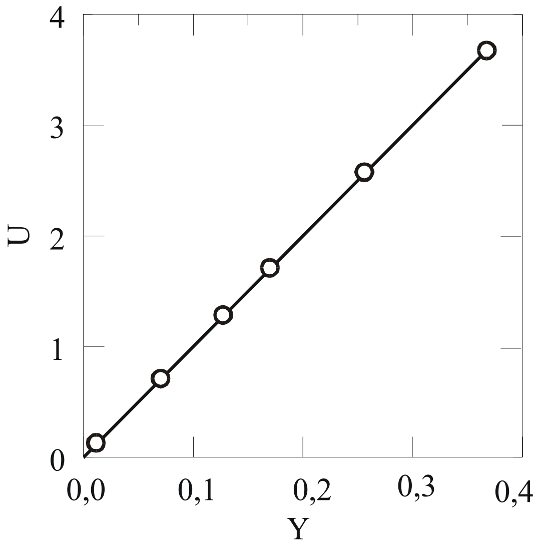

Рис. 1

Проведенный вычислительный эксперимент и сравнение с известным аналитическим решением показали, что построенный комбинированный алгоритм является более точным и экономичным, чем традиционный метод конечных элементов.

Литература

1. *Берковский Б. М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости./ М.: Химия, 1989. 240 с.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов/ Пер. с англ. Л. Г. Корнейчука; Под ред. И. Г. Григолюка. М.: Мир, 1987. 524 с.