классические численные методы решения дифференциальных уравнений справиться не могут.

Работа выполнена под научным руководством профессора Бобкова В. В.

Литература

1. *Фалейчик Б. В.* Метод последовательных приближений типа Пикара с использованием тригонометрической аппроксимации // Сборник статей VII научной конференции студентов и аспирантов Беларуси (НИРС-2002). Витебск, 2002. С. 48–50.
2. *Бобков В. В., Кучмиенко И. А., Фалейчик Б. В.* Дискретный аналог метода Пикара // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2002. № 3. С. 68–71.
3. *Милн В. Э.* Численное решение дифференциальных уравнений / Пер. с англ. под ред. М. Р. Шура-Бура. М.: Издательство иностранной литературы, 1955.

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СУММ НОМИРВАННЫХ ПЕРЕМЕШИВАЮЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Г. Федосенко

Как показано в [1, 2], в результате корреляции слагаемых в предельном распределении сумм зависимых случайных величин (с.в.) может возникнуть «нормальный шум», то есть в предельной характеристической функции (х.ф.) распределения сумм может появиться множитель $\exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$, где

$$\sigma^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\sigma_n,$$

$$\sigma_n = \sum_{s=1}^{n} M(\eta_{ns}^2; |\eta_{ns}^2| \le \varepsilon) + \sum_{p\ne r}^{n} M(\eta_{np}\eta_{nr}; |\eta_{np}| \le \varepsilon \wedge |\eta_{nr}| \le \varepsilon).$$

Таким образом, в качестве предельного распределения сумм нормированных зависимых с.в. может выступать распределение из класса L, логарифм х.ф. которого имеет вид

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x) + ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}, \tag{1}$$

где из области интегрирования исключен ноль. Важно отметить, что первые два слагаемых можно находить в предположении независимости случайных величин [1].

Покажем, что если с.в. η_{ns} нормированы, одинаково распределены и их функции распределения (ф.р.) принадлежат области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α, $0<\alpha<2$, то в случае равномерно сильного перемешивания (р.с.п.) слагаемых распределения сумм

$$S_n = \sum_{s=1}^{n} \eta_{ns} \tag{2}$$

будут сходиться к устойчивому распределению характеристическим показателем $\alpha<2$, то есть в предельном распределении сумм будет отсутствовать нормальный компонент.

Пусть $\{X_s\}_{s=1}^{\infty}$ – последовательность действительных с.в., определенных на одном и том же вероятностном пространстве, удовлетворяющих условию р.с.п. с коэффициентом $\beta(\tau)=o(\tau^{-3-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, и имеющих ф.р.

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{c_1+o(1)}{|x|^{\alpha}} h(|x|) \text{ при } x\to-\infty, \\ 1-\dfrac{c_2+o(1)}{x^{\alpha}} h(x) \text{ при } x\to\infty, \end{cases}$$

где $c_1\ge 0$, $c_2\ge 0$, $c_1+c_2>0$.

Положим $\eta_{ns}=\dfrac{X_s}{n^{1/\alpha}h(n)}$. Ф.р. $F_n(x)$ величин η_{ns} находятся в области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha<2$ [3, 4], и имеют вид:

$$F_n(x)=\begin{cases} \dfrac{c_n^{(1)}+o(1)}{n|x|^{\alpha}} h(|x|) \text{ при } x\to-\infty, \\ 1-\dfrac{c_n^{(2)}+o(1)}{nx^{\alpha}} h(x) \text{ при } x\to\infty. \end{cases} \tag{3}$$

Если существует предельное распределение сумм (2), то, как было сказано выше, логарифм его х.ф. имеет вид (1), причем, так как первые два слагаемых можно находить в предположении независимости с.в., то, очевидно, они представляют собой логарифм устойчивой х.ф. с характеристическим показателем $\alpha<2$ [3, 4]). Кроме того, согласно теореме 3.11 из [1], если случайные величины одинаково распределены при каждом n и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sum\limits_{s=1}^{n} M(\eta_{ns}^2;|\eta_{ns}^2|\le\varepsilon)=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r\neq p} M(\eta_{np}\eta_{nr};|\eta_{np}|\le\varepsilon \wedge |\eta_{nr}|\le\varepsilon)=0\,.$$

Очевидно, если выполнено условие (3), то

$$\sum_{s=1}^{n} M(\eta_{ns}^2;|\eta_{ns}^2|\le\varepsilon)=n\int\limits_{|x|\le\varepsilon} x^2 dF_n(x)\le n\frac{\varepsilon^2}{n}\int\limits_{|x|\le\varepsilon} dF(x)\le\varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,.$$

Поэтому, $\sigma^2=0$ и в предельном распределении сумм (2) отсутствует нормальный компонент.

Приведем пример, иллюстрирующий приведенные выше рассуждения.

Пример. Возьмем три ф.р.:

$$F^{(1)}(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{|x|^{\alpha}}, & x<-K,\\ 1/2, & -K\le x\le K,\\ 1-\dfrac{c}{x^{\alpha}}, & x>K,\end{cases}\qquad F^{(2)}(x)=\begin{cases}0, & x<-K,\\ 1/2, & -K\le x\le K,\\ 1-\dfrac{2c}{x^{\alpha}}, & x>K,\end{cases}$$

$$F^{(3)}(x)=\begin{cases}\dfrac{2c}{|x|^{\alpha}}, & x<-K,\\ 1/2, & -K\le x\le K,\\ 1, & x>K,\end{cases}$$

где постоянные $K>0$, $c\le K^{\alpha}/4$, $0<\alpha<2$.

Зададим последовательность $\{X_s\}_{s=1}^{n}$ зависимых случайных величин, определяя их ф.р. следующим образом: $F_s(x)=F^{(1)}(x)$; при $q>s$, $q-s=k$, $F_q(x/X_s\ge 0)=(1-b_k)F^{(1)}(x)+b_kF^{(2)}(x)$, $F_q(x/X_s<0)=$ $=(1-b_k)F^{(1)}(x)+b_kF^{(3)}(x)$, где $0\le b_k\le 1$ и $b_k=o(k^{-3-\varepsilon})$. Очевидно, что безусловная ф.р. величины X_q будет $F_q(x)=\frac{1}{2}F_q(x/X_s\ge 0)+\frac{1}{2}F_q(x/X_s<0)=$ $=F^{(1)}(x)$, следовательно, величины X_s равно распределены.

Пусть теперь $\eta_{ns}=\dfrac{X_{ns}}{n^{1/\alpha}}$. Получили систему серий нормированных равно распределенных случайных величин. Ф.р. величин η_{ns} будут иметь вид

$$F_n(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{n|x|^{\alpha}} & \text{при } x < -\varepsilon_n \text{ и } x \to -\infty, \\ 1/2 & \text{при } -\varepsilon_n \le x \le \varepsilon_n, \\ 1 - \dfrac{c}{nx^{\alpha}} & \text{при } x > \varepsilon_n \text{ и } x \to \infty, \end{cases}$$

где $\varepsilon_n = K/\sqrt{n}$. Такие ф.р. удовлетворяют условию (3). При этом очевидно, что

1) коэффициент р.с.п. $\beta(k) = o(k^{-3-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.

Кроме того, при $\varepsilon > \varepsilon_n$

$$2)\ \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n} M(\eta_{ns}^2; |\eta_{ns}^2| \le \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int_{\varepsilon_n < |x| < \varepsilon} x^2 dF_n(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} n\frac{2\alpha c}{2-\alpha}\frac{x^{2-\alpha}}{n}\Bigg|_{\varepsilon_n}^{\varepsilon} = 0.$$

$$3)\ \sum_{r\ne p} M(\eta_{np}\eta_{nr}; |\eta_{np}| \le \varepsilon \wedge |\eta_{nr}| \le \varepsilon) = n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4c^2\alpha^2 b_k}{n^2(1-\alpha)^2}x^{1-\alpha}\Bigg|_{\varepsilon_n}^{\varepsilon} =$$

$$= \frac{4c^2\alpha^2 b_k}{n(1-\alpha)^2}\left(\varepsilon^{1-\alpha} - \varepsilon_n^{1-\alpha}\right)\sum_{k=1}^{n-1} b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Последнее вычисление можно было не делать, поскольку, согласно теореме 3.11 из [1], этот результат сразу следует из пункта 2.

Таким образом, $\sigma^2 = 0$, то есть нормальный компонент в предельном распределении сумм (2) отсутствует.

Литература

1. *Юдин М. Д.* Сходимость распределений сумм случайных величин. Мн., 1990.
2. *Юдин М. Д.* Об уточнении условий сходимости распределений сумм зависимых случайных величин // Изв. вузов. Математика. 1989, № 10. С. 87–89.
3. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., 1949.
4. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М., 1987.