ОЦЕНКА КВАЗИМАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ АГРЕГИРОВАННЫХ GARCH ПРОЦЕССОВ

Н. А. Прилуцкая

Широко известно, что модели типа GARCH дают эффективное представление условной гетероскедастичности, показываемой финансовыми временными рядами. Однако у них есть серьезный недостаток – их внутренняя несостоятельность при агрегировании. При решении проблемы агрегирования Нейман и Сентана [4] определили новый класс процессов – агрегированные GARCH. Этот класс замкнут по одновременному агрегированию.

Обозначим через $F_t \equiv (y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots)$ информационное множество в период t, а через $\{\xi_t\}$ – последовательность независимых и одинаково распределлнных случайных величин. Пусть $\{y_{1,t}\}$ и $\{y_{2,t}\}$ два независимых одномерных GARCH(1,1) процесса вида:

$$y_{i,t} = \sigma_{i,t}\xi_{i,t}, \tag{1}$$

где $\sigma_{i,t}^2 = \psi + \beta\sigma_{i,t-1}^2 + \alpha y_{i,t-1}^2$ для i=1, 2, $E\{\xi_{i,t}\} = 0$ и $E\{\xi_{i,t}^2\} = 1$. Преобразуем (1) и рассмотрим ARMA(1, 1) – представление для временных рядов квадратов доходностей

$$y_{i,t}^2 = \psi_i + \left(\beta_i + \alpha_i\right) y_{i,t-1}^2 + \eta_{i,t} - \beta_i\eta_{i,t-1}, \tag{2}$$

где $\eta_{i,t}$ определяется в виде $\eta_{i,t} \equiv y_{i,t}^2 - \sigma_{i,t}^2$. Чтобы (2) было каузальным и обратимым ARMA(1, 1), нужно наложить следующие условия на параметры ψ_i ,β_i и α_i : $\psi_i > 0$, $\beta_i \geq 0$ и $\alpha_i \geq 0$ и $1 - (\beta_i + \alpha_i)z \neq 0$ для всех $z \in C$ таких что $|z| \leq 1$. Более того $\eta_{i,t} \sim WN(0, \sigma_{i,\eta}^2)$ (3).

Рассмотрим сумму $\{y_t\}$ двух независимых одномерных GARCH(1,1) процессов $\{y_{i,t}\}$: $y_t = y_{1,t} + y_{2,t}$ (4)

Для определения параметров агрегированного процесса выбирается подход Неймана и Сентаны [4]. Имеет место следующее утверждение:

Теорема. Пусть $\{y_{i,t}\}$ два независимых одномерных GARCH(1,1) процесса, определенных по (1) и (2) и таких что $\beta_1 + \alpha_1 = \beta_2 + \alpha_2$. Тогда агрегированный процесс $y_t = y_{1,t} + y_{2,t}$ удовлетворяет соотношению $y_t^2 = \sigma_t^2 + \eta_t$, $\sigma_t^2 = \psi + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha y_{t-1}^2$, где σ_t^2 линейная проекция y_t^2 на $F_t^{'} \equiv (1, y_{t-1}^2, y_{t-2}^2, \ldots)$. Параметры ψ, β и α являются функциями параметров двух процессов и определяются как $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $\alpha = (\beta_1 + \alpha_2) - \beta$,

$$\beta\left(1+\beta^2\right)^{-1} = \frac{\beta_1\sigma_{\eta,1}^2 + 4(\beta_1+\alpha_1)\sigma_1^2\sigma_2^2 + \beta_2\sigma_{\eta,2}^2}{(1+\beta_1^2)\sigma_{\eta,1}^2 + 4\left[1+(\beta_1+\alpha_1)^2\right]\sigma_1^2\sigma_2^2 + (1+\beta_2^2)\sigma_{\eta,2}^2}.$$

$$\eta_t \sim WN(0,\sigma_\eta^2),\ \sigma_\eta^2 = \sigma^4(k-1)\frac{1-(\beta+\alpha)^2}{1-(\beta+\alpha)^2+\alpha^2},$$

где k – коэффициент асимметрии агрегированного процесса $\{y_t\}$.

Говорят, что определенный таким образом агрегированный процесс является «слабым» GARCH(1,1).

Следует обратить внимание, что σ_t^2 для «слабого» GARCH есть линейная проекция y_t^2 на $F_t' \equiv (1, y_{t-1}^2, y_{t-2}^2, \ldots)$. Кроме того нормированная переменная $\frac{y_t}{\sigma_t}$ уже более не является условной н.о.р. при условии информационного множества F_t. И в то время как для «сильного» GARCH можно легко вывести аналитическое представление для границ области определения моментов высших порядков η_t, для агрегированного GARCH эти границы можно определить только численными методами.

Рассмотрим ARMA(1,1) – представление рядов квадратов $\{y_t^2\}$ агрегированного процесса. Оно будет иметь следующий вид:

$$y_t^2 = \psi + (\beta+\alpha)y_{t-1}^2 + \eta_t - \beta\eta_{t-1},\ \{\eta_t\} \sim WN(0,\sigma_\eta^2). \quad (5)$$

Заметим, что вектор параметров – $(\psi,\beta,\alpha,\sigma_\eta^2)$, последняя компонента не является независимой от остальных компонент, поскольку

$$\sigma_\eta^2 = \sigma^4(k-1)\frac{1-(\beta+\alpha)^2}{1-(\beta+\alpha)^2+\alpha^2}. \quad (6)$$

Оценка КМП для агрегированных GARCH процессов

Пусть в (6) предыдущей части параметры ψ, β и α удовлеворяют (3), а вариация σ_η^2 задается видом (6). Пусть $\{x_t\}$ – центрированный ряд, такой что для каждого $t \geq 0$ имеем

$$x_t \equiv y_t^2 - E\left[y_t^2\right] = y_t^2 - \sigma^2. \quad (7)$$

Определенная таким образом последовательность $\{x_t\}$ удовлетворяет рекурсии

$$x_t - \phi x_{t-1} = \eta_t + \theta\eta_{t-1},\ \{\eta_t\} \sim WN(0, \sigma_\eta^2), \tag{8}$$

где $\varphi \equiv \beta + \alpha$ и $\theta \equiv -\beta$. Отклонения вычисляются, используя алгоритм отклонений Броквелла-Дэйвиса [2].

Скорректированная Гауссовская оценка КМП

Предлагается оценить параметры в (8), используя ОКМП при Гауссовском предположении. Исходя из [1], [2] была построена гауссовская лог-функция правдоподобия $l\left(\phi, \theta, \sigma_\eta^2\right)$ для вектора наблюдений $X_T \equiv (x_1, ..., x_T)'$ и вычислены условия 1-го порядка для оптимума $l\left(\phi, \theta, \sigma_\eta^2\right)$. Далее предлагается корректирующий метод, в котором некоторые значения заменяются их оцененными величинами. Рассматривается случай, когда имеется слабосостоятельная предварительная оценка $\left(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, \tilde{v}_n\right)$ системных параметров $\left(\phi, \theta, \sigma_\eta^2\right)$. Оценками $\hat{\phi}\ и\ \hat{\theta}$ системных параметров будут значения φ и θ, минимизирующие

$$cl(\phi, \theta) \equiv T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\ln r_{t-1} + \ln\sum_{t=1}^{T}\frac{(x_t - \hat{x}_t)^2}{r_{t-1}} + \tilde{\delta}_T\left(\phi\,\tilde{s}_\phi + \theta\,\tilde{s}_\theta\right),$$

$$\tilde{s}_\phi = \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\ln\sum_{t=1}^{T}\frac{(x_t - \tilde{x}_t)^2}{\tilde{r}_{t-1}}\right) и\ \tilde{s}_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln\sum_{t=1}^{T}\frac{(x_t - \tilde{x}_t)^2}{\tilde{r}_{t-1}}\right).$$

Тем же методом получается $\hat{\sigma}_\eta^2 = T^{-1}\left[1 + \tilde{\delta}_T\right]^{-1}\sum_{t=1}^{T}\frac{(x_t - \hat{x}_t)^2}{r_{t-1}}$, где $\hat{x}_t$ и r_{t-1} определяются в оптимуме, т. е. когда $(\phi, \theta) = \left(\hat{\phi}, \hat{\theta}\right)$.

Альтернативные предположения о плотности

В случае, когда распределение отклонений не является нормальным, предположения о других плотностях распределения могут быть более подходящими. Используя [3], строится соответствующая функция правдоподобия $l_L(\bullet)$ вектора наблюдений $X_T \equiv (x_1, ..., x_T)'$:

$$l_L\left(\phi, \theta, \sigma_\eta^2\right) = -\frac{T}{2}\ln\left(\sigma_\eta^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left(r_{t-1}\right) - \frac{1}{\sigma_\eta}\sum_{t=1}^{T}\frac{|x_t - \hat{x}_t|}{\sqrt{r_{t-1}}}.$$

Обозначим через $\left(\hat{\phi}_L, \hat{\theta}_L, \hat{\sigma}_{\eta_L}^2\right)$ ОКМП, полученную максимизацией $l_L(\bullet)$. Как показано в [3], последняя оценка подходит для случаев, когда отклонения имеют конечный коэффициент асимметрии $k_\eta > 3$.

Однако коэффициент асимметрии может не существовать. Поэтому делается предположение об α-стабильной плотности распределения. Плотности α-стабильных случайных величин существуют и непрерывны, но за малыми исключениями не имеют аналитического вида. В общем случае, известна только характеристическая функция $\Phi_Z(t) = E[\exp(itZ)]$ [3]. Обозначим через $f_\alpha(\cdot)$ симметрично стабильную плотность с индексом α. Состоятельная предварительная оценка $(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, \tilde{v}_n)$ была использована для построения ряда наилучших линейных приближений $\{\tilde{x}_t\}$ процесса $\{x_t\}$, а так же их среднеквадратичных ошибок $\{\tilde{r}_{t-1}\}$. Далее строится состоятельная оценка квантилей $(\tilde{\alpha}, \tilde{\sigma}, \tilde{\beta}, \tilde{\mu})$ с помощью метода МакКаллоха [3]. Эти оценки используются впоследствии для формирования «усеченного» α-стабильного квази-логправдоподобия

$$l_{\tilde{S}}(\phi,\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(r_{t-1}) - \sum_{t=1}^{T}\ln f_{\tilde{\alpha}}\left(\frac{x_t - \hat{x}_t - \tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}\sqrt{r_{t-1}}}\right).$$

Асимптотические свойства оценок КМП

Таблица

Пример ОКМП для (β0,α0)=(0.569, 0.281)

	θ_0	$\hat{\theta}_{N\&S}$	$\hat{\theta}_G$	$\hat{\theta}_L$	$\hat{\theta}_S$
β	0,569	0,690	0,6572	0,4293	0,5631
α	0,281	0,125	0,2787	0,3238	0,2910
N	–	30	36717	509	1403
T	–	80000	5000	5000	5000

Имитации Монте-Карло, проведенные в данной работе, показывают что предположение об α-стабильной плотности ведет к более качественной ОКМП параметров агрегированного GARCH(1,1) процесса. α-стабильная ОКМП параметра скользящего среднего имеет наименьшую асимптотическую приверженность в классе рассмотренных оценок.

Однако асимптотическая приверженность α-стабильной ОКМП для параметра авторегрессии несколько больше чем для параметра α, и минимальна при Гауссовском предположении.

Литература

1. *Bollerslev T., Engle R. F.* Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariance // Econometric Reviews. 1992. № 11. P. 143–179.
2. *Brockwell P., Davis R.* Time Series: Theory and Methods. 1987. New York. P. 309–376.

3. *McCulloch J. H.,* Simple consistent estimator of stable distribution parameters // Communications in Statistics-Computation and Simulation. 1986. № 15, P. 1109–1136.
4. *Nijman T. E., Sentana E.,* Marginalization and Contemporaneous Aggregation in Multivariate GARCH process // Journal of Econometrics. 1996. № 71. P. 71–87.

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

С. Г. Размыслович

Рассмотрим задачу стабилизации половинной модели автомобиля, а именно, при действии возмущений необходимо уменьшить колебания кузова с минимальным расходом топлива. Считается, что колеса не пневматические и рассматриваются малые колебания. Математическая модель исследуемой системы имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2, \\ \dot{x}_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + b_{41}u_1 + b_{42}u_2, t \in T = [0, t^*], \end{cases} \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – вектор состояния системы (фазовые переменные), $u = (u_1, u_2)$ – значение управляющего воздействия,

$$\begin{aligned} & a_{31} = k_1/m + k_2/m, \; a_{32} = k_1 a/m - k_2 b/m, \; b_{31} = -1/m, \; b_{32} = -1/m, \\ & a_{41} = -k_1 a/J + k_2(a+b)/J, \; a_{42} = -k_1 a^2/J - k_2 b(a+b)/J, \; b_{41} = a/J, \; b_{42} = -b/J, \end{aligned} \tag{2}$$

k_1 – жесткость первой пружины, k_2 – жесткость второй пружины, m– масса поперечной балки, J – момент инерции, a,b – расстояния от концов балки до середины.

Наложив некоторые ограничения на начальное состояние системы:

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10}, x_3(0) = x_{30}, \\ x_2(0) = x_{20}, x_4(0) = x_{40}, \end{cases} \tag{3}$$

Зададим терминальное ограничение:

$$\begin{cases} x_1(t^*) = 0, x_3(t^*) = 0, \\ x_2(t^*) = 0, x_4(t^*) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

Определим класс доступных управлений, который состоит из кусочно-постоянных функций с периодом квантования $h = \dfrac{t^*}{n}$ отрезка T, n-натуральное число, $u(t) = u_k, t \in [kh, (k+1)h[, \quad k = 0,1,\ldots,n-1$ стесненных ограничением