2. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., 1984.
3. *Коллинз Р.* Течение жидкостей через пористые материалы. М., 1964.

МНОГОЛИНЕЙНАЯ УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

Д. С. Орловский

Введение

Модели систем массового обслуживания с повторными вызовами достаточно адекватно описывают процессы обмена информацией в компьютерных и телекоммуникационных сетях, что делает актуальным их построение и исследование. В данной работе рассматривается многолинейная система с повторными вызовами и изменяющимся в зависимости от числа заявок в системе числом активных (включенных) обслуживающих приборов. Стратегия включения и выключения – многопороговая. Для фиксированных значений порогов находится стационарное распределение вероятностей состояний системы. Численно решается задача оптимизации порогов.

Модель

В систему поступает пуассоновский с параметром λ поток заявок. Имеются $N, N \geq 2$ идентичных обслуживающих приборов, динамически включающихся и выключающихся согласно следующей стратегии. Задан набор порогов $M_l, l = \overline{1, N-1} : 0 = M_0 \leq M_1 < M_2 < \ldots < M_N = \infty$. Во всякий момент число s активных приборов определяется числом m заявок в системе (на обслуживании и на орбите) из неравенства $M_{s-1} \leq m < M_s$. Если для поступившей в систему заявки находится свободный активный прибор, заявка занимает его, если все активные приборы заняты, но число заявок в системе достигло очередного порога $M_s, s = \overline{1, N-1}$, то включается и начинает обслуживание $(s+1)$-й прибор. Не попавшие на обслуживание заявки не покидают систему, а уходят на орбиту и повторяют попытки занять свободный прибор через экспоненциально распределенные с параметром α_i интервалы времени, где i – число заявок на орбите. Последовательность $\alpha_i, i \geq 1$ предполагается имеющей конечный либо бесконечный предел $\lim\limits_{i \to \infty} \alpha_i$. Продолжительность обслуживания заявки прибором распределена экспоненциально с параметром μ. Если после завершения обслуживания в системе остается ровно $M_s - 1, s = \overline{1, N-1}$ заявок, освободившийся прибор выключается.

Вычисление стационарных вероятностей системы

Пусть i_t – число заявок на орбите, n_t – число занятых приборов, а $m_t = i_t + n_t$ – число заявок в системе в момент в момент $t, t \geq 0$. Тогда процесс $\xi_t = (i_t, n_t), t \geq 0$ – неприводимая цепь Маркова с непрерывным временем. Обозначим число активных приборов при наличии m заявок в системе как $N^M(m)$, а максимальное возможное число включенных приборов, при наличии i заявок на орбите как $N^I(i)$, тогда:

$$N^M(m) = s, \text{ } если \text{ } M_{s-1} \leq m < M_s, s = \overline{1, N}, \tag{1}$$

$$N^I(i) = \max_{k \geq 1}\{k \mid k \leq N^M(i+k)\}, i \geq 0, \tag{2}$$

Пространство S состояний $\xi_t, t \geq 0$ есть $\{(i,n) \mid i \geq 0, N = \overline{1, N^I(i)}\}$. Обозначим стационарные вероятности $\xi_t, t \geq 0$ как $p(i,n), (i,n) \in S$.

Теорема 1. Векторы $\vec{p}_i = (p(i,0), p(i,1), \ldots, p(i, N^I(i))), i \geq 0$ удовлетворяют системе уравнений баланса:

$$\sum_{i=\max\{l-1,0\}}^{l+1} \vec{p}_i \, A_{i,l} = \vec{0}, l \geq 0, \tag{3}$$

где матрицы $A_{i,l}$ размера $(N^I(i)+1) \times (N^I(l)+1)$ имеют вид:

$$(A_{i,i-1})_{kl} = \begin{cases} \alpha_i, & l = k+1, \\ 0, & иначе, \end{cases} i \geq 1,$$

$$(A_{i,i})_{kl} = \begin{cases} \lambda, & l = k+1, \\ r\mu, & l = k-1, \\ q_{ki}, & l = k, \\ 0, & иначе, \end{cases} i \geq 0,$$

$$(A_{i,i+1})_{kl} = \begin{cases} \alpha_i, & l = k = N^I(i), \\ 0, & иначе, \end{cases} i \geq 0,$$

$$q_{ki} = \begin{cases} -(\lambda + k\mu), & i = 0, \\ -(\lambda + i\alpha + k\mu), & i \ge 1, 0 \le k < N^I(i), \\ -(\lambda + k\mu), & i \ge 1, N^I(i-1) \le k \le N^I(i). \end{cases}$$

Цепь Маркова $\xi_t, t \ge 0$ – асимптотически квазитеплицева. Задача решения (3) для таких цепей была рассмотрена, например, в [1, 2], однако описанные там алгоритмы подразумевают, что все матрицы $A_{i,l}, i,l \ge 0$ – квадратные, чего в нашем случае не наблюдается. Это вызывает необходимость проделать некоторые дополнительные операции.

Из (1), (2) следует, что

$$\exists i^* = \min_{i \ge 0}\{i \mid N^I(i) = N\} : \forall i \ge i^*, N^I(i) = N .$$

Этот факт наводит на мысль как-либо исключить из системы (3) векторы $\vec{p}_i, 0 \le i \le i^* - 1$ с целью получить систему аналогичного вида, но содержащую лишь квадратные матрицы. Можно показать, что в нашем случае применим алгоритм исключения, аналогичный используемому при решении систем уравнений методом Гаусса, который в результате приводит к системе:

$$\begin{cases} \vec{p}_{i^*} \hat{A}^{(i^*)} + \vec{p}_{i^*+1} A_{i^*+1,i^*} = \vec{0}, \\ \sum\limits_{i=l-1}^{l+1} \vec{p}_i A_{i,l} = \vec{0}, l \ge i^* + 1, \end{cases} \tag{4}$$

где $\hat{A}^{(i^*)}$ находится из соотношения

$$\hat{A}^{(i)} = A_{i,i} - A_{i,i-1}(\hat{A}^{(i-1)})^{-1} A_{i-1,i}, i = \overline{1,i^*}, \hat{A}^{(0)} = A_{0,0} .$$

После решения (4) одним из известных [1, 2] методов, векторы $\vec{p}_i, i = \overline{0,i^* - 1}$ вычисляются по формуле

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i+1} A_{i+1,i} (\hat{A}^{(i)})^{-1}, i = \overline{0,i^* - 1} .$$

Достаточные условия разрешимости системы (4), а с ней и (3) можно определить, используя лемму из [2].

Теорема 2. Для существования стационарного распределения $\xi_t, t \ge 0$ достаточно, чтобы в случае $\lim\limits_{i \to \infty} \alpha_i = \infty$ выполнялось неравенство

$$\lambda < N\mu , \tag{5}$$

а в случае $\lim\limits_{i \to \infty} \alpha_i = \gamma < \infty$ – неравенство

$$\gamma \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda+\gamma}{\mu} \right)^k > \frac{\lambda}{N!} \left(\frac{\lambda+\gamma}{\mu} \right)^N . \qquad (6)$$

Задача оптимизации порогов

Рассмотрим следующую прикладную задачу, решаемую с помощью разработанного алгоритма. Задан критерий качества

$$F(M_1, \ldots, M_{N-1}) = C_h K_h + C_b K_b + C_i K_i + C_s K_s , \qquad (7)$$

где K_h – среднее число заявок на орбите, K_b – интенсивность ухода на орбиту, K_i – среднее отношение суммарного времени простоя приборов (прибор простаивает, если он активен, но не занят) ко времени функционирования системы, K_s – интенсивность включений приборов, а C_h, C_b, C_i, C_s – соответствующие ценовые коэффициенты (цены). Цены заданы извне, значения остальных величин вычисляются на основании стационарных вероятностей. Экономический смысл критерия очевиден. Наша задача – для заданных значений параметров системы минимизировать критерий за счет выбора порогов $M_l, l = \overline{1, N-1}$.

Выбрав из каких-либо соображений значение верхнего предела для порогов M^*, задачу можно решать численно, перебором по множеству наборов $\{M_l, l = \overline{1, N-1} \mid 0 \le M_1 < M_2 < \ldots < M_{N-1} \le M^*\}$ с целью найти набор, поставляющий критерию минимум.

Для примера рассмотрим случай гомогенных порогов: $M_l = lM, l = \overline{1, N-1}$. Пусть $N = 2, \lambda = 4, \mu = 4, \alpha = 0, \gamma = 10$. Обозначим критерий (7) для $C_h = 0.02, C_b = 1, C_i = 1, C_s = 1$ как F_1, а для $C_h = 0.1$, $C_b = 0.5, C_i = 5, C_s = 5$ – как F_2. Зависимость составляющих критерия K_h, K_b, K_i, K_s и критериев F_1, F_2 от шага порогов M приведена в таблице. Минимум F_1 достигается при $M = 5$, минимум F_2 – при $M = 9$.

Таблица

Зависимость K_h, K_b, K_i, K_s и F_1, F_2 от M

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kh	0,749	1,287	1,935	2,655	3,43	4,249	5,104	5,987	6,895	7,822
Kb	1,241	1,704	1,95	2,097	2,189	2,249	2,29	2,318	2,337	2,351
Ki	0,717	0,597	0,533	0,495	0,471	0,455	0,445	0,437	0,432	0,429
Ks	1,176	0,71	0,462	0,316	0,223	0,162	0,121	0,093	0,073	0,06
F1	3,149	3,037	2,985	2,96	2,951	2,952	2,958	2,968	2,81	2,996
F2	10,16	7,514	6,144	5,366	4,907	4,637	4,484	4,41	4,39	4,4

Литература

1. *Breuer L., Dudin A. N., Klimenok V. I.* A retrial BMAP|PH|N system // Queueing Systems, 2002. Vol. 40. P. 433–457.
2. *Dudin A. N., Klimenok V. I.* A retrial BMAP|SM|1 system with linear repeated requests // Queueing Systems, 2000. Vol. 34. No 1–4 P. 47–66.

ВЛИЯНИЕ АДДИТИВНЫХ ИСКАЖЕНИЙ НА ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ БЕТА-ЛОГИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДАННЫХ

М. А. Пашкевич

Введение

Бета-логистическая модель (БЛМ) традиционно используется для моделирования группированных бинарных данных в случае наличия априорной информации о свойствах объектов, над которыми производятся испытания. Впервые эта модель была введена Хекманом [2], и с тех пор широко используется в политологии [5], маркетинге [6] и других областях [1, 4]. При этом для оценивания параметров БЛМ обычно применяется метод максимального правдоподобия (ММП) [2]. Однако на практике гипотетическая вероятностная модель наблюдений оказывается, как правило, неадекватной в силу искажений различных типов [3]. Поэтому возникает необходимость исследования влияния этих искажений на свойства классических оценок. В данной работе исследуется влияние аддитивных стохастических искажений бинарных данных на оценки максимального правдоподобия (ММП-оценки) параметров БЛМ.

Математические модели и постановка задачи

Пусть определена некоторая совокупность из k объектов и некоторое случайное событие A. Над каждым объектом i этой совокупности производится серия из n_i испытаний. Результаты испытаний описываются набором k бинарных векторов-строк $B = (B_1, B_2, \dots, B_k)$, $B_i \in \{0,1\}^{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, где $B_{ij} = 1$, если в испытании j для объекта i случайное событие A имело место, и $B_{ij} = 0$ в противном случае. Объекту номер i поставлен в соответствие вектор факторов $Z_i \in R^m$, описывающий свойства этого объекта. Предполагается, что:

П$_1$. Вероятностные свойства объектов в процессе испытаний не меняются.

П$_2$. Вероятность p_i наступления случайного события A для i-ого объекта является случайной величиной, которая имеет бета распределение с параметрами α_i^0, β_i^0, причем $p_1, p_2, \dots, p_k$ независимы в совокупности.