

Литература

1. *Четыркин Е.* Статистическое прогнозирование. М.: Наука, 1977.
2. *Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль М.* Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М.: Мир, 1989.
3. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.
4. *Tukey J. W.* A survey of sampling from contaminated distributions // In: Contributions to Probability and Statistics, Stanford Univ. Press, 1960.
5. *Харин Ю. С.* Робастность в статистическом распознавании образов. Мн.: «Университетское», 1992.
6. *Kharin Yu., Fursa R.* Robustness of time series forecasting for distorted trend model. – In: «Computer Data Analysis and Modeling». Mn.: BSU, 1995.
7. *Маевский В. В.* Об асимптотическом разложении функции распределения локально-медианного прогноза // В сборнике: «Математические методы в финансах и эконометрика» Мн.: БГУ, 2002.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А. В. Маковский

Уравнения, описывающие процессы фильтрации в пористой среде вытекают из законов фильтрации и сохранения массы фаз; в зависимости от моделируемых условий учитываются или нет упругие свойства породы, сжимаемость, неньютоновские свойства фильтрующихся фаз, гравитационные силы и т. д.

Можно выделить следующие основные модели процессов вытеснения в пористой среде: Лейбензона-Маскета, в которой предполагается полное взаимное вытеснение одной фазы другой; Баклея-Левретта, когда неполнота вытеснения учитывается введением относительных фазовых проницаемостей; Рапопорта-Лиса, если учитываются относительные фазовые проницаемости и капиллярный скачок давления между фазами.

Рассмотрим одномерную модель Баклея-Левретта. Примем предположения о том, что фильтрующиеся фазы несжимаемы, их вязкости постоянны, пористая среда недеформируема, гравитационными силами можно пренебречь. Для простоты будем рассматривать случай, когда начальное распределение насыщенности $s(x, t)$ однородно. Получаем следующую краевую задачу:

$$p = p(x, t); s = s(x, t); x \in [0; L], t \in [0; \infty)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; u = -k \left(\frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$s(x,0) = s_* - const \quad (3)$$

$$s(0,t) = s^* - const \quad (4)$$

$$p(L,t) = p_0 \quad (5)$$

$$u = u(t) \quad (6)$$

$$f_1(s) = f_1^0 (s^* - s)^{\alpha_1}; f_2(s) = f_2^0 (s - s_*)^{\alpha_2}$$

$$F = \mu \cdot f_2 / (f_1 + \mu \cdot f_2)$$

$$\mu = \mu_1 / \mu_2 - const$$

В литературе можно найти решение данной задачи для случая, когда суммарный поток $u(t) = u - const$ [3]. Особенности решения квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка (2), часто называемого уравнением Баклея-Левверетта, обусловлены видом функции $F(s)$. Эта функция имеет точку перегиба при $s = s_m$.

Можно доказать, что при $s_* < s_m < s^*$ распределение насыщенности $s(x,t)$ получается разрывным.

Значение насыщенности в точке разрыва слева s_r можно найти из соотношения [2]:

$$F'(s_r) = \frac{F(s_r) - F(s_*)}{s_r - s_*}. \quad (7)$$

Координата точки разрыва определяется так:

$$x_r(t) = \frac{u}{m} F'(s_r) t. \quad (8)$$

Насыщенность справа от точки разрыва совпадает с начальной.

Что касается поведения насыщенности слева от точки разрыва, то имеет место следующее соотношение:

$$x = \frac{u}{m} F'(s) t. \quad (9)$$

Построим решение для случая, когда $u(t) \neq const$. Для этого введем следующую замену:

$$\tau = \int_0^t u(t) dt. \quad (10)$$

После чего (3) приобретает следующий вид:

$$m \frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Откуда

$$s(x, t) = s_1(x, \tau(t)), \quad (12)$$

где $s_1(x, t)$ – насыщенность для $u(t) = 1$.

Найдем распределение давления $p(x, t)$ из (1), (5):

$$p(x, t) = u(t) \int_x^L \frac{1}{K(x, s_1(x, \tau(t)))} dx + p_0, \quad (13)$$

где $K(x, s) = k(x)(f_1(s)/\mu_1 + f_2(s)/\mu_2)$.

Преобразуем (13) следующим образом:

$$p(x, t) = \frac{u(t)}{m} \left(\int_{s(x, \tau(t))}^{s(x_m(x, \tau(t)), \tau(t))} \frac{F''(s)\tau(t)}{K(F'(s)\tau(t), s)} ds + \int_{x_m(x, \tau(t))}^L \frac{1}{K(x, s_*)} dx \right), \quad (14)$$

где $x_m(x, t) = \max(x, x_r(t))$.

Представление (14) предпочтительнее (13) поскольку все подынтегральные функции – аналитические.

Из (12) следует, что распределение насыщенности для потоков $u_1(t)$ и $u_2(t)$ совпадают в момент времени t при условии:

$$\int_0^t u_1(t) dt = \int_0^t u_2(t) dt. \quad (15)$$

С практической точки зрения представляет интерес следующая задача: минимизировать максимальное давление на левой границе подбором $u(t)$ при условии (15) для $t = T$.

Достаточно неплохой результат дает следующее выражение:

$$u(t) = T / (p_1(t) \int_0^T p_1(t)^{-1} dt), \quad (16)$$

где $p_1(x, t)$ – давление для $u(t) = 1$.

В характерных случаях максимальное давление на левой границе уменьшается на 5 % при варьировании $u(t)$ в пределах 10 %.

Таким образом, было получено и исследовано аналитическое решение одной задачи двухфазной фильтрации с непостоянным потоком.

Литература

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М., 1982.

2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., 1984.
3. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М., 1964.

МНОГОЛИНЕЙНАЯ УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

Д. С. Орловский

Введение

Модели систем массового обслуживания с повторными вызовами достаточно адекватно описывают процессы обмена информацией в компьютерных и телекоммуникационных сетях, что делает актуальным их построение и исследование. В данной работе рассматривается многолинейная система с повторными вызовами и изменяющимся в зависимости от числа заявок в системе числом активных (включенных) обслуживающих приборов. Стратегия включения и выключения – многопороговая. Для фиксированных значений порогов находится стационарное распределение вероятностей состояний системы. Численно решается задача оптимизации порогов.

Модель

В систему поступает пуассоновский с параметром λ поток заявок. Имеются N , $N \geq 2$ идентичных обслуживающих приборов, динамически включающихся и выключающихся согласно следующей стратегии. Задан набор порогов $M_l, l = \overline{1, N-1}: 0 = M_0 \leq M_1 < M_2 < \dots < M_N = \infty$. Во всякий момент число s активных приборов определяется числом m заявок в системе (на обслуживании и на орбите) из неравенства $M_{s-1} \leq m < M_s$. Если для поступившей в систему заявки находится свободный активный прибор, заявка занимает его, если все активные приборы заняты, но число заявок в системе достигло очередного порога $M_s, s = \overline{1, N-1}$, то включается и начинает обслуживание $(s+1)$ -й прибор. Не попавшие на обслуживание заявки не покидают систему, а уходят на орбиту и повторяют попытки занять свободный прибор через экспоненциально распределенные с параметром α_i интервалы времени, где i – число заявок на орбите. Последовательность $\alpha_i, i \geq 1$ предполагается имеющей конечный либо бесконечный предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i$. Продолжительность обслуживания за-