

МНОГОЭТАПНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

И. А. Кучмиенко

В этой работе предлагается способ решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'(x) = f(x, u(x)), u(t) = y, t \leq x \leq t + \tau. \quad (1)$$

Будем исходить из равенства

$$u(x) = y + \tau \int_0^{\beta} \psi(\alpha) d\alpha, \quad (2)$$

где $\psi(\alpha) = f(t + \alpha \tau, u(t + \alpha \tau))$, $\beta = \frac{x-t}{\tau}$, $0 \leq \beta \leq 1$.

Для построения численной аппроксимации (2) разложим $\psi(\alpha)$ в ряд Фурье по функциям некоторой ортонормированной на $[0,1]$ системы $e_j(\alpha)$, $j = \overline{0, \infty}$, и ограничимся суммой $n+1$ членов этого ряда, при этом коэффициенты разложения вычислим приближенно с помощью некоторой квадратурной формулы с узлами α_k и весами A_k , $k = \overline{0, m}$. Неопределенный интеграл от этой суммы может быть взят точно, если известны точные интегралы функций $e_j(\alpha)$, $j = \overline{0, n}$.

Покажем, как можно такой метод записать в компактной матричной форме.

$$\text{Имеем } \psi(\alpha) \approx \sum_{j=0}^n c_j^* e_j(\alpha), \quad c_j^* = \sum_{k=0}^m A_k \psi(\alpha_k) e_j(\alpha_k) \approx \int_0^1 \psi(\alpha) e_j(\alpha) d\alpha.$$

Тогда

$$u(x) \approx y + \tau \sum_{j=0}^n c_j^* \int_0^{\beta} e_j(\alpha) d\alpha. \quad (3)$$

Пусть $x_k = t + \tau \alpha_k$, $k = \overline{0, m}$. Подставляя в формулу (3) вместо x последовательно $x_0, \dots, x_m$ и заменяя там приближенное равенство на точное, получим систему алгебраических уравнений

$$y_i = y + \tau \sum_{j=0}^n c_j \int_0^{\alpha_i} e_j(\alpha) d\alpha \quad (i = 0, 1, \dots, m), \quad c_j = \sum_{k=0}^m A_k f(x_k, y_k) e_j(\alpha_k). \quad (4)$$

Мы рассчитываем на близость решений y_i системы (4) к значениям $u(x_i)$ точного решения исходной задачи.

Если ввести обозначения

$$Y = [y_0, \dots, y_m], \quad Y_0 = [\underbrace{y, \dots, y}_{m+1 \text{ раз}}], \quad F(Y) = [f(x_0, y_0), \dots, f(x_m, y_m)],$$

$$W = [A_k e_j(\alpha_k)]_{k,j}, \quad k = \overline{0, m}, \quad j = \overline{0, n}, \quad E = \left[\int_0^{\alpha_j} e_j(\alpha) d\alpha \right]_{j,i}, \quad j = \overline{0, n}, \quad i = \overline{0, m},$$

то метод (4) можно записать в виде

$$Y = Y_0 + \tau F(Y) W E. \quad (5)$$

Приведем конкретный пример выбора $e_j(\alpha)$, α_k и A_k для задания метода (5). Подынтегральную функцию в (2), определенную на $[0,1]$, продолжим четным образом на отрезок $[-1,0]$ и разложим ее в ряд Фурье на отрезке $[-1,1]$ по тригонометрической системе

$$1/\sqrt{2}, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \dots,$$

которая является [1, с. 170] классическим примером ортонормированной системы в пространстве $L_2[-1,1]$.

Для четной функции коэффициенты ряда Фурье, соответствующие функциям $\sin n\pi x$, равны нулю, а коэффициенты, соответствующие функциям $\cos n\pi x$, равны удвоенному значению интеграла по отрезку $[0,1]$. С учетом этих замечаний воспользуемся формулой (5). Для вычисления определенных интегралов применим составную квадратурную формулу трапеций (что позволит находить значения y_i в равноотстоящих узлах). Получим:

$$\alpha_k = \frac{k}{m}, \quad k = \overline{0, m}, \quad A_k = \begin{cases} \frac{1}{2m}, & k = 0 \vee k = m \\ \frac{1}{m}, & k = \overline{1, m-1} \end{cases},$$

$$e_j(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & j = 0 \\ \cos j\pi \alpha, & j > 0 \end{cases}, \quad \int_0^{\beta} e_j(\alpha) d\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \beta, & j = 0 \\ \frac{1}{j\pi} \sin j\pi \beta, & j > 0 \end{cases}, \quad j = \overline{0, n}.$$

Чтобы упростить итоговые формулы, перенесем коэффициенты, содержащие квадратные корни, из матрицы W в матрицу E . Тогда будем иметь:

$$W = 2[A_k u_j(\alpha_k)]_{k,j}, \quad u_j(\alpha_k) = \begin{cases} 1, j = 0 \\ \cos j\pi \alpha_k, j > 0 \end{cases}, \quad k = \overline{0, m}, \quad j = \overline{0, n}, \quad (6)$$

$$E = [v_j(\alpha_i)]_{j,i}, \quad v_j(\alpha_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha_i, j = 0 \\ \frac{1}{j\pi} \sin j\pi \alpha_i, j > 0 \end{cases}, \quad j = \overline{0, n}, \quad i = \overline{0, m}. \quad (7)$$

Проиллюстрируем работоспособность описанного выше метода в сравнении с явным методом Эйлера на примере задачи

$$u'(x) = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -10^{-14} \end{pmatrix} u(x), \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (8)$$

Для решения системы (5) используем метод простых итераций, записывающийся применительно к (5) как $Y^{s+1} = Y_0 + \tau F(Y^s) W E$. В качестве стартового значения для итерационного процесса возьмем вектор Y_0 , а в качестве приближенного решения указанной системы – Y^{100} .

Положим $\Delta(i, h) = \max_k |u_k(i, h) - y_k(i, h)|$, $i = 1, 2$, $k = \overline{0, m}$, где h – параметр тестируемого метода ($0 < h \leq 1$), $u_k(i, h)$ – значение i -той компоненты точного решения (8) в некоторой точке $x_k(h)$, а $y_k(i, h)$ – приближение к i -той компоненте решения в этой же точке, полученное с помощью используемого метода. В случае метода Эйлера в качестве h возьмем величину одного шага метода в его пошаговой реализации, тогда $x_k(h)$ естественно взять как kh . В случае же метода (5) с параметрами (6), (7) через h зададим m и n следующим образом: $m = n = [h^{-1}]$, а в качестве $x_k(h)$ возьмем точки $\frac{k}{[h^{-1}]}$. На рис. 1 и 2 отображены графики ошибок $\Delta(i, h)$ каждого из методов в зависимости от h по первой и второй компонентам соответственно.

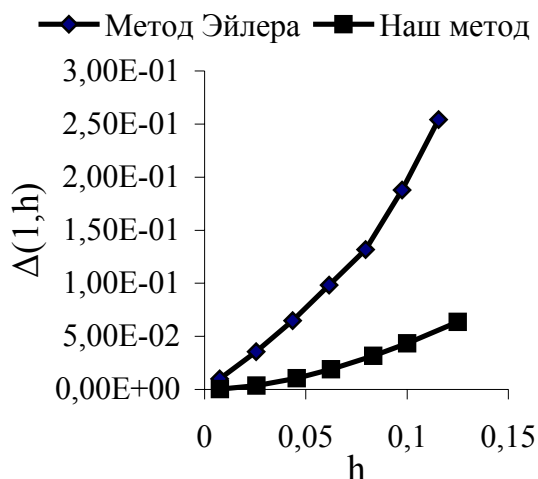


Рис. 1

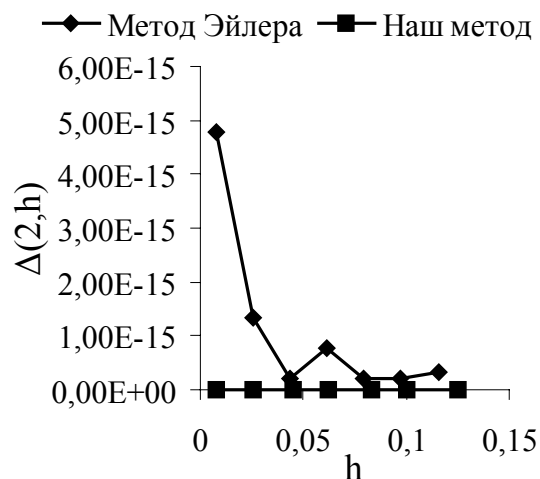


Рис. 2

С уменьшением шага принято ожидать улучшения приближения к решению, но, как видно из рис. 2, это не всегда верно. В данном случае рис. 2 иллюстрирует так называемую «проблему подвисания», возникающую из-за ограниченности разрядной сетки. В случае метода Эйлера при уменьшении шага с целью увеличения точности приближения по быстрой компоненте мы ухудшили уровень приближения медленной (такая же ситуация характерна и для других традиционных пошаговых методов фиксированного порядка точности).

В методе (5) этот недостаток существенно ослаблен. Медленную гармонику он, как и метод из [2], хорошо отслеживает и при достаточно малых h . Ошибки при вычислении быстрой гармоники, как и следовало ожидать, уменьшаются с уменьшением h (рис. 1).

Данная работа выполнена под научным руководством профессора Бобкова В. В.

Литература

1. Антонец А. Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн.: Изд-во «Университетское», 1984. 351 с.
2. Бобков В. В., Кучмиенко И. А., Фалейчик Б. В. Дискретный аналог метода Пикара // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 68–71.