

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И СПЕЦИАЛЬНЫМ МИНИМАКСНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

В. П. Короб

На траекториях системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h), u(t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [t_0 - h, t_0), \\ x_0, & t = t_0, \end{cases} \quad (2)$$

минимизируется функционал

$$J(u) = \max_{q \in Q} \varphi(x(\tau_1), \dots, x(\tau_k), q), \quad (3)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, $q \in Q \in R^m$, Q – компакт, $t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = t_1$, $u(t)$, $t \in T$ – кусочно-непрерывные r -мерные вектор-функции со значениями из заданного множества U :

$$u(t) \in U, \quad t \in T,$$

обозначим $x(t-h) = y(t)$, $x(\tau_i) = z_i$, $i = \overline{1, k}$,

Подобные задачи, но либо для обыкновенных систем, либо с другим видом критерия качества, рассматривались в [1–3] и для них доказаны условия оптимальности первого порядка и условия второго порядка особых управлений. Задача (1)–(4) до сих пор не исследовалась. В данной работе для этой задачи получены необходимые условия оптимальности первого порядка в виде принципа максимина и необходимые условия оптимальности особых управлений на языке матричных функций.

Обозначим

$$H(t, q) \equiv H(x(t), y(t), \psi(t, q), u(t), t) = \psi'(t, q) f(x(t), y(t), u(t), t).$$

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, необходимо чтобы выполнялось условие максимина

$$\max_{v \in U} \min_{q \in Q_0} \Delta_v H(x(t), y(t), \psi(t, q), u(t), t, q) = 0,$$

где $\psi(t, q)$, $t \in T$ – решение системы

$$\dot{\psi}(t, q) = -\frac{\partial H(t, q)}{\partial x} - \delta_{[t_0, t-h)}(t) \frac{\partial H(t+h, q)}{\partial y}, \quad t \in T, \quad (4)$$

с начальным условием

$$\psi(t_1, q) = -\frac{\partial \varphi(z, q)}{\partial z_k} \quad (5)$$

и условиями скачков

$$\psi(\tau_i - 0, q) = \psi(\tau_i + 0, q) - \frac{\partial \varphi(z, q)}{\partial z_i}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (6)$$

где $\delta_\omega(t) = \begin{cases} 1, & t \in \omega, \\ 0, & t \notin \omega, \end{cases} \quad z = (z_1, \dots, z_k), \quad Q_0 = \left\{ q \in Q : \varphi(z, q) = \max_{\bar{q} \in Q} \varphi(z, \bar{q}) \right\}.$

Пусть $u(t) \in U, \quad t \in T$ – особое управление т. е.

$$\min_{q \in Q_0} \Delta_v H(x(t), y(t), \psi(t, q), u(t), t, q) = 0, \quad \forall v \in U, \quad t \in T.$$

Тогда справедливо утверждение:

Теорема 2. Для оптимальности особого управления $u(t) \in U, \quad t \in T$, необходимо, чтобы вдоль него и соответствующих решений $x(t)$ системы (1), (2) и $\psi(t, q)$ системы (4)–(6) выполнялось условие

$$\min_{q \in Q_0} \left(\Delta_v \frac{\partial H(t, q)}{\partial x} + \Delta_v f'(t) \bar{\Psi}(t, q) \Delta_v f(t) \right) \leq 0 \quad \forall v \in U, \quad t \in T, \quad \text{где}$$

$$\bar{\Psi}(t, q) = \Psi(t, q) + C(t, q),$$

$$C(t, q) = \delta_{[t_0, t-h)}(t) \int_{t+h}^t B(\tau, t, q) d\tau,$$

$$B(t, \tau, q) = F'(\tau, t) \Gamma(\tau, t, q) + \Gamma'(\tau, t, q) F(\tau, t),$$

$$\Gamma(\tau, t, q) = \left(\frac{\partial^2 H(\tau, q)}{\partial x \partial y} + \Psi(\tau, q) \frac{\partial f(\tau)}{\partial y} \right) F(v(\tau), t),$$

$\Psi(t, q)$, – решение матричного уравнения

$$\dot{\Psi}(t, q) = -\frac{\partial f'(t)}{\partial x} \Psi(t, q) - \Psi(t, q) \frac{\partial f(t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(t, q)}{\partial^2 x} - \delta_{[t_0, t_1-h)}(t) \frac{\partial^2 H(t+h, q)}{\partial^2 x},$$

с начальным условием $\Psi(t_1, q) = -\frac{\partial^2 \varphi(z, q)}{\partial z_i^2}$ и скачками

$$\begin{aligned} \Psi(\tau_i - 0, q) = \Psi(\tau_i + 0, q) - \frac{\partial^2 \varphi(z, q)}{\partial z_i^2} - \sum_{j=i+1}^k \frac{\partial^2 \varphi(z, q)}{\partial z_i \partial z_j} F(\tau_j, \tau_i) + \\ + F'(\tau_j, \tau_i) \frac{\partial^2 \varphi(z, q)}{\partial z_j \partial z_i}, \end{aligned}$$

$F(t, \tau)$ – решение системы

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = -F(t, \tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial x} - F(t, \tau + h) \frac{\partial f(t + h)}{\partial y},$$

$$F(t, t - 0) \equiv E, \quad F(t, \tau) \equiv 0, \quad \tau > t.$$

Литература

1. *Альсевич В. В.* Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимального управления // Проблемы управления и оптимизации: Сб. науч. ст. под ред. Ф. М. Кирилловой. Мн., 1976.
2. *Альсевич В. В. Францкевич О. В.* Особые управления для задач с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы // Дифференц. уравнения. 1983. № 3.
3. *Альсевич В. В.* Оптимизация динамических систем с запаздываниями // Мн. БГУ, 2000.

НЕРАВНОМЕРНАЯ ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУММ М-ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ОТ ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Я. Б. Кошкин

Пусть $X_1, X_2, \dots$ стационарная в узком смысле последовательность m -зависимых случайных величин с $EX_1 = 0$. Положим

$$S_k = \sum_{j=1}^k X_j, \quad \bar{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k, \quad G(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x^+} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x^+ = \max\{0, x\},$$

$$\sigma^2 = EX_1^2 + 2 \sum_{k=2}^{m+1} EX_1 X_k, \quad \bar{B}_n^2 = B_n^2(X) = nEX_1^2 + 2 \sum_{k=2}^{m+1} (n-k+1) EX_1 X_k.$$