6. *Андерсон Т. В.* Введение в многомерный статистичекий анализ. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 500 с.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА

С. А. Дичковская

Многочисленные практически важные задачи, возникающие в различных областях науки, техники, экономики и производства сводятся к p-индексной ($p \geq 3$) аксиальной проблеме выбора (p-аксиальной ПВ)[1, 2], являющейся обобщением хорошо известной двухиндексной задачи о назначениях.

Для решения p-аксиальной ПВ могут быть использованы как точные, так и приближенные алгоритмы. Точные алгоритмы решения этой проблемы имеют экспоненциальную оценку трудоемкости, что и неудивительно, поскольку она (даже при $p = 3$) является NP-полной [3]. В связи с этим несомненный интерес представляет исследование и разработка простых и эффективных приближенных алгоритмов.

В [4] при некоторых дополнительных условиях, налагаемых на коэффициенты целевой функции, предложен полиномиальный алгоритм α нахождения асимптотически оптимального решения p-аксиальной ПВ порядка n. Иначе говоря, установлено, что с ростом n доля p-аксиальных ПВ, в которых данный алгоритм строит асимптотически оптимальный план, среди всех задач стремится к 1.

Постановка 3-аксиальной ПВ порядка n заключается в минимизации целевой функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_{ijk}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1, \ k = 1, 2, ..., n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \ j = 1, 2, ..., n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \ i = 1, 2, ..., n,$$

$x_{ijk} = 0$ или 1, $I = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $c = \left\| c_{ijk} \right\|_n$ – заданная трехиндексная матрица с действительными элементами.

Приведем некоторые определения: совокупность элементов трехиндексной матрицы $c = \left\| c_{ijk} \right\|_n$ с фиксированным значением одного индекса, например, i будем называть двумерным сечением ориентации *(jk)* матрицы c; совокупность элементов трехиндексной матрицы $c = \left\| c_{ijk} \right\|_n$ с фиксированными значениями двух индексов, например, i и j, будем называть одномерным сечением ориентации k матрицы c.

Таким образом, 3-аксиальная ПВ заключается в том, чтобы выбрать n элементов матрицы, по одному в каждом двумерном сечении, так, чтобы сумма их была минимальной по всем возможным наборам.

Автором настоящего доклада программно реализованы на языке Object Pascal (в среде Delphi) пять алгоритмов для 3-аксиальной ПВ порядка n: алгоритм α нахождения приближенного решения, в основу которого положен метод минимального элемента, описанный в [4]; алгоритмы β и γ нахождения приближенного решения, в основу которых положено нахождение минимального элемента соответственно в двумерном и одномерном сечении трехиндексной матрицы; алгоритм φ ветвей и границ; модифицированный алгоритм ψ ветвей и границ, использующий на предварительном этапе для построения нижней оценки план, построенный с помощью алгоритма α.

Опишем алгоритмы α, β и γ построения приближенного решения 3-аксиальной ПВ.

Алгоритм α нахождения приближенного решения 3-аксиальной ПВ

Алгоритм состоит из последовательно проводимых шагов.

Шаг 1**.** Находим минимальный элемент матрицы c, если их несколько, то берем любой из них. Пусть таким элементом оказался $c_{i_0 j_0 k_0}$. Тогда полагаем $x^*_{i_0 j_0 k_0} = 1$, $x^*_{i_0 jk} = 0$ для всех j и k; $x^*_{ij_0 k} = 0$ для всех i и k; $x^*_{ijk_0} = 0$ для всех i и j. Вычеркиваем элементы $c_{i_0 jk}$ для всех j и k, $c_{ij_0 k}$ для всех i и k, c_{ijk_0} для всех i и j. В результате выполненных операций получаем подматрицу $c^{(1)}$ матрицы c. Ясно, что указанная процедура может быть продолжена для матрицы $c^{(1)}$. Всего необходимо проделать n шагов этого процесса. В результате получаем некоторый план x^*. Легко видеть, что сложность алгоритма α построения плана x^* составляет $O(n^4)$ действий.

Алгоритм β нахождения приближенного решения 3-аксиальной ПВ

Он состоит из последовательно проводимых шагов.

Шаг 1. Находим минимальный элемент в двумерном сечении матрицы c, например, ориентации (jk), с фиксированным значением i_0. Пусть таким элементом оказался $c_{i_0 j_0 k_0}$. Тогда полагаем $x^*_{i_0 j_0 k_0} = 1$, $x^*_{i_0 jk} = 0$ для всех j и k; $x^*_{ij_0 k} = 0$ для всех i и k; $x^*_{ijk_0} = 0$ для всех i и j. Вычеркиваем элементы $c_{i_0 jk}$ для всех j и k, $c_{ij_0 k}$ для всех i и k, c_{ijk_0} для всех i и j. В результате выполненных операций получаем подматрицу $c^{(1)}$ матрицы c. Ясно, что указанная процедура может быть продолжена для матрицы $c^{(1)}$. Всего необходимо проделать n шагов этого процесса. В результате получаем некоторый план x^*. Сложность алгоритма β построения плана x^* составляет $O(n^3)$ действий.

Алгоритм γ нахождения приближенного решения 3-аксиальной ПВ

Он состоит из последовательно проводимых шагов.

Шаг 1. Находим минимальный элемент в одномерном сечении матрицы c, например, ориентации k, с фиксированными значениями двух индексов i_0 и j_0. Пусть таким элементом оказался $c_{i_0 j_0 k_0}$. Тогда полагаем $x^*_{i_0 j_0 k_0} = 1$, $x^*_{i_0 jk} = 0$ для всех j и k; $x^*_{ij_0 k} = 0$ для всех i и k; $x^*_{ijk_0} = 0$ для всех i и j. Вычеркиваем элементы $c_{i_0 jk}$ для всех j и k, $c_{ij_0 k}$ для всех i и k, c_{ijk_0} для всех i и j. В результате выполненных операций получаем подматрицу $c^{(1)}$ матрицы c. Ясно, что указанная процедура может быть продолжена для матрицы $c^{(1)}$. Всего необходимо проделать n шагов этого процесса. В результате получаем некоторый план x^*. Сложность алгоритма γ построения плана x^* составляет $O(n^2)$ действий.

Для этих алгоритмов проведены вычислительные эксперименты на тестовых задачах, исходная информация (матрица c) для которых задавалась посредством генератора случайных чисел, настроенного на работу с целыми числами в области от 1 до 100 (с использованием компьютера Atlon900, 256 Mb RAM, ОС Windows 98). Всего было решено более 40000 задач. Результаты проведенных вычислительных экспериментов представлены в таблице, из которой вытекает, что:

- алгоритм α при условии, что коэффициенты целевой функции принимают значения из отрезка $[1, r]$, где $r \le n^{1-\theta}$, $\frac{1}{2} < \theta < 1$, $n \ge 30$, строит оптимальный план, по крайней мере, в 95 % решаемых задач;
- алгоритм β при условии, что коэффициенты целевой функции принимают значения из отрезка $[1, r]$, где $r \le n^{1-\theta}$, $\frac{1}{2} < \theta < 1$, $n \ge 30$, строит оптимальный план, по крайней мере, в 87 % решаемых задач;

Таблица

Результаты проведенных вычислительных экспериментов, на тестовых 3-аксиальных ПВ*)

Номер серии задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Порядок задачи, n	10	10	20	20	30	30	40	40	50	50	60	60	100	100	250	500
Коэф-ты целевой функции, принадл. отрезку [1,r], r	3	10	4	10	5	10	6	20	7	20	8	30	10	100	15	20
Количество решенных тестовых задач в серии	1000	1000	1000	1000	100	100	100	50	50	50	50	50	100	100	50	50
Среднее время решения задачи в серии с помощью алгоритма α, сек.	+	+	+	+	0,055	0,065	0,11	0,11	0,26	0,27	0,55	0,65	4,01	4,06	149,23	5720
Среднее время решения задачи в серии с помощью алгоритма β, сек.	+	+	+	+	+	+	+	+	0,064	0,066	0,12	0,11	2,82	3,21	38,05	148
Среднее время решения задачи в серии с помощью алгоритма γ, сек.	+	+	+	+	+	+	+	+	0,016	0,017	0,026	0,032	2,36	2,7	14,63	36
Среднее время решения задачи в серии с помощью алгоритма φ, сек.	+	0,22	0,16	2,4	1,205	6,2	6,55	72,3	19,1	140,5	27,2	605,1	–	–	–	–
Среднее время решения задачи в серии с помощью алгоритма ψ, сек.	+	0,16	0,134	1,45	0,865	3,92	4,36	42,2	11,2	80,25	18,35	338,45	–	–	–	–
Доля задач в серии, решаемых оптимально с помощью алгоритма α, %	95	82	96	83,5	95,5	84	95,3	79	95,7	77	96,5	79	96	54	98	97
Доля задач в серии, решаемых оптимально с помощью алгоритма β, %	88,3	78,1	86,9	79,9	87,1	80,6	87,4	76,2	88,1	77,1	88,8	77,9	88	48	91	89
Доля задач в серии, решаемых оптимально с помощью алгоритма γ, %	82,3	74,1	81,9	73,9	82,3	74,5	82,6	72,1	82,9	74,2	83,6	77,5	84	44	85	85

*) Примечание: «–» – задача не была решена на используемом компьютере;
«+» – задача была решена за слишком малый промежуток времени

• алгоритм γ при условии, что коэффициенты целевой функции принимают значения из отрезка $[1, r]$, где $r \le n^{1-\theta}$, $\frac{1}{2} < \theta < 1$, $n \ge 30$, строит оптимальный план, по крайней мере, в 82 % решаемых задач;

• алгоритм ψ требует гораздо меньшее количество времени по сравнению с алгоритмом φ для нахождения оптимального плана.

При попытке решить 3-аксиальную ПВ порядка $n = 65$, с использованием точных алгоритмов φ и ψ, было выдано сообщение о нехватке памяти, что означает невозможность решить задачу указанной размерности на используемом компьютере. В то же время 3-аксиальная ПВ порядка $n = 500$ успешно была решена с помощью приближенных алгоритмов α, β и γ.

Литература

1. *Pierskalla W. P.* The tri-substitution method for the three-dimensional assignment problem // CORS J. (Canada). 1967. V. 5, № 2. P. 71–81.
2. *Pierskalla W. P.* The multidimensional assignment problem // Oper. Res. 1968. V. 16. P. 422–431.
3. *Balas Egon, Salthzman Mathew J.* Facets of the three-index assignment polytope. // Discrete Appl. Math. 1989. Vol. 23, № 3. P. 201–229.
4. *Кравцов М. К., Крачковский А. П.* Асимптотический подход к решению многоиндексной аксиальной проблемы выбора. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 2. С. 123–126.

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ МИКРОСХЕМ ДИАЛОГОВОЙ УЧЕБНОЙ СРЕДЫ «PHIZOSN»

П. И. Жук, А. С. Кузьмич, А. Б. Смолкин

1. Описание модели логической схемы

Введем некоторые понятия, которые используются в модели логической схемы, реализуемой в программе.

В работе рассматриваются два типа моделируемых объектов: логические элементы и логические схемы.

Логический элемент состоит из списка входов, списка выходов и таблицы истинности, которая определяет значения на выходах в зависимости от значений на входах.

Логическая схема состоит из списка входов, списка выходов, списка логических элементов (в качестве компоненты этого списка может быть логический элемент или подсхема) и списка связей их соединяющих. На входах схемы задаются входные сигналы, а на выходах схемы получаются выходные сигналы, что реализуется с помощью алгоритма моделиро-