

2. $\alpha = 1$

$$X = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V \right) \operatorname{tg} V - \beta \ln \left(\frac{\frac{\pi}{2} W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right], \quad (9)$$

где $C_{\alpha, \beta} = \frac{\arctg(\beta \operatorname{tg}(\frac{\pi \alpha}{2}))}{\alpha}$, $D_{\alpha, \beta} = (\cos(\arctg(\beta \operatorname{tg}(\frac{\pi \alpha}{2}))))^{-\frac{1}{\alpha}}$ является устойчивой с $\sigma = 1$, $\mu = 0$ ($X \sim S_{\alpha}(1, \beta, 0)$).

Теорема дает формулы для генерирования устойчивой случайной величины с $\sigma = 1$, $\mu = 0$ ($X \sim S_{\alpha}(1, \beta, 0)$). Используя следующее свойство, которое вытекает из вида характеристической функции, можем сгенерировать устойчивую случайную величину для всех допустимых значений параметров.

Если $X \sim S_{\alpha}(1, \beta, 0)$ и

$$Y = \begin{cases} \sigma X + \mu, \alpha \neq 1 \\ \sigma X + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \ln \sigma + \mu, \alpha = 1 \end{cases}, \quad (10)$$

то случайная величина Y является устойчивой с $\sigma \neq 1$, $\mu \neq 0$ ($Y \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$).

Литература

1. *Aleksander Janicki, Adam Izydorczyk. Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym* // WNT, Warszawa. 2001
2. *Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения* // М.: Наука. 1983.

ПРОГНОЗИРОВАНИЯ AR-ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ НАЛИЧИИ «ПРОПУСКОВ»

А. С. Гурин

Введение

Авторегрессионные временные ряды часто используются для математического моделирования, статистического анализа данных, прогнозирования временных рядов, в теории принятия статистических решений [1–3]. На практике временные ряды, как правило, наблюдаются при наличии «пропусков» [4; 5]. Методы, используемые в литературе для прогнозирования авторегрессионных временных рядов при наличии «пропусков», являются, как правило, эвристическими, трудными для анализа и для них не изучены их асимптотические свойства. В настоящей работе

построены прогнозы по методу максимального правдоподобия для авторегрессионных временных рядов при наличии «пропусков», найден среднеквадратический риск прогнозирования.

Математическая модель и постановка задачи

Пусть наблюдаемый временной ряд описывается AR(p)-моделью:

$$y_t = \beta' Y_{t-1} + \xi_t, \quad t \in Z, \quad (1)$$

где Z – множество целых чисел, $Y_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1})' \in R^p$, $\beta \in R^p$ – вектор коэффициентов, $\{\xi_t\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с нормальным распределением: $N(0, \sigma^2)$. В данных $\{y_t\}_{t=1}^N$ имеются «пропуски», где N – общее количество данных: наблюдаемых и ненаблюдаемых. Укажем бинарный вектор (шаблон наблюдений) $O \in R^N$, такой что $O_t = \{1, \text{ если } y_t \text{ наблюдается; } 0, \text{ если } y_t \text{ – пропущенное значение}\}$.

Определим множество $M = \{t, t \in Z : O_t = 1\}$ тех моментов времени, для которых данные наблюдаются, $K = |M|$, $t_- = \min M$, $t_+ = \max M$. Определим биекцию $M \leftrightarrow \{1, \dots, K\} : k = \chi(t)$ и обратную функцию $t = \bar{\chi}(k)$. Составим (K) – вектор только наблюдаемых данных:

$$X = (x_1, \dots, x_K)' \in R^K, \quad x_k = y_{\bar{\chi}(k)}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2)$$

Заметим, что если $O_t = 1, t_- \leq t \leq t_+$, тогда процесс $\{y_t\}$ наблюдается на $[t_-, t_+]$ без «пропусков», $K = t_+ - t_- + 1$, $X = (y_{t_-}, y_{t_-+1}, \dots, y_{t_+})'$, $\chi(t) = t - t_- + 1, t = t_-, \dots, t_+$; $\bar{\chi}(k) = t_- + k - 1, k = 1, \dots, K$.

Проблема состоит в прогнозировании будущего значения временного ряда $y_{t_++\tau}$ для $\tau \geq 1$ по наблюдениям X .

Прогнозирование при известных параметрах

Введем матричные обозначения:

$$F = (F_{ij}) = \text{cov}\{X, X\}, \quad G = (G_i) = \text{cov}\{X, y_{t_++\tau}\}, \quad H = \text{cov}\{y_{t_++\tau}, y_{t_++\tau}\},$$

$$A'_0 = A'_0(\beta, \sigma^2) = G'F^{-1}X, \quad B = \begin{pmatrix} \beta' \\ I_{p-1} & 0_{p-1} \end{pmatrix}, \quad d = (1, 0, \dots, 0)' \in R^p,$$

$$\Sigma = \sigma^2 dd', \quad \tilde{\Sigma} = \sum_{i=0}^{\infty} B^i \Sigma (B')^i,$$

где I_p – единичная $(p \times p)$ -матрица, $0_{p \times q}(1_{p \times q})$ – $(p \times q)$ -матрица, все элементы которой равны 0(1).

Лемма 1. Пусть все характеристические числа матрицы B лежат в единичном круге. Тогда следующие выражения для матриц F, G, H имеют место:

$$F_{ij} = F_{ji} = \left(B^{\bar{\chi}(i) - \bar{\chi}(j)} \tilde{\Sigma} \right)_{1,1}, i, j = 1, \dots, K, i \geq j;$$

$$G_i = \left(B^{(t_+ + \tau) - \bar{\chi}(i)} \tilde{\Sigma} \right)_{1,1}, i = 1, \dots, K, H = \left(\tilde{\Sigma} \right)_{1,1}.$$

Доказательство. Используя (2) и хорошо известное выражение для ковариаций AR(p) процесса для $i \geq j$ [2]: $\text{cov}\{y_i, y_j\} = \left(B^{i-j} \tilde{\Sigma} \right)_{1,1}$, находим:

$$F_{ij} = \text{cov}\{x_i, x_j\} = \text{cov}\{y_{\bar{\chi}(i)}, y_{\bar{\chi}(j)}\} = \left(B^{\bar{\chi}(i) - \bar{\chi}(j)} \tilde{\Sigma} \right)_{1,1},$$

$$G_i = \text{cov}\{y_{t_+ + \tau}, x_i\} = \text{cov}\{y_{t_+ + \tau}, y_{\bar{\chi}(i)}\} = \left(B^{(t_+ + \tau) - \bar{\chi}(i)} \tilde{\Sigma} \right)_{1,1},$$

$$H = \text{cov}\{y_{t_+ + \tau}, y_{t_+ + \tau}\} = \left(\tilde{\Sigma} \right)_{1,1}.$$

Теорема 2. Если модельные параметры β, σ^2 известны, все характеристические числа матрицы B лежат в единичном круге, и $|F| \neq 0$, тогда МП-прогноз $y_{t_+ + \tau}$ есть

$$\hat{y}_{t_+ + \tau} = E\{y_{t_+ + \tau} | X\} = A'_0 X, \quad (3)$$

и среднеквадратический риск прогнозирования

$$r_0 = E\{(\hat{y}_{t_+ + \tau} - y_{t_+ + \tau})^2\} = H - G'F^{-1}G \geq 0. \quad (4)$$

Доказательство. Определим $Y_+ = (X', y_{t_+ + \tau})' \in R^{K+1}$. Так как $\{\xi_t\}$ – независимые одинаково распределенные нормальные случайные величины, вектор Y_+ имеет нормальное распределение: $L(Y_+) = N_{K+1}(0_{K+1}, D_{K+1})$, где $D_{K+1} = \begin{pmatrix} F & G \\ G' & H \end{pmatrix}$. Согласно теореме Андерсона [6] функция правдоподобия для $y_{t_+ + \tau}$ есть:

$$l(y_{t_+ + \tau}; \beta, \sigma^2) = n_K(X | 0_K, F) n_1(y_{t_+ + \tau} | G'F^{-1}X, H - G'F^{-1}G). \quad (5)$$

МП-прогноз есть решение экстремальной задачи:

$$l(y_{t_+ + \tau}; \beta, \sigma^2) \rightarrow \max_{y_{t_+ + \tau}}.$$

Так как первый множитель функции правдоподобия не зависит от $y_{t_+ + \tau}$, приходим к единственному решению (3).

Используя формулу полного математического ожидания и (3), находим риск (4):

$$\begin{aligned} r_0 &= E\left\{\left(\hat{y}_{t_+ + \tau} - y_{t_+ + \tau}\right)^2\right\} = E\left\{E\left\{\left(E\{y_{t_+ + \tau} | X\} - y_{t_+ + \tau}\right)^2 | X\right\}\right\} = \\ &= E\left\{\text{cov}\{y_{t_+ + \tau}, y_{t_+ + \tau} | X\}\right\} = E\{H - G'F^{-1}G\} = H - G'F^{-1}G. \end{aligned}$$

Прогнозирование при неизвестных параметрах

Теорема 2. Если модельные параметры β, σ^2 неизвестны, все характеристические числа матрицы B лежат в единичном круге, тогда МП-прогноз $y_{t_+ + \tau}$ есть

$$\hat{y}_{t_+ + \tau} = A_0'(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)X, \quad (6)$$

где МП-оценки $\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$ есть решение экстремальной задачи:

$$l_1(\beta, \sigma^2) = X'F^{-1}X + \ln|F| + \ln|H - G'F^{-1}G| \rightarrow \min_{\beta, \sigma^2}. \quad (7)$$

Доказательство. Согласно (5) совместные МП-оценки $y_{t_+ + \tau}, \beta, \sigma^2$ есть решение экстремальной задачи:

$$l(\hat{y}_{t_+ + \tau}; \beta, \sigma^2) \rightarrow \max_{\beta, \sigma^2}. \quad (8)$$

Согласно (5) и Теореме 1, задача (8) эквивалентна задаче:

$$n_K(X | 0_K, F) n_1(G'F^{-1}X | G'F^{-1}X, H - G'F^{-1}G) \rightarrow \max_{\beta, \sigma^2}.$$

Взяв логарифм, приходим к (6), (7).

Литература

1. *Андерсон Т. В.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 755 с.
2. *Box G. E. P., Jenkins G. M.* Time Series Analysis: Forecasting and Control. San Francisco: Holden Day, 1976. 450 p.
3. *Hamilton J. D.* Time Series Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1994. 850 p.
4. *Kohn R., Ansley G.* Estimation, prediction and interpolation for ARIMA models with missing data // J. of the American Statistical Association. 1986, vol. 81, no. 395. P. 751–761.
5. *Pourahmadi M.* Estimation and interpolation of missing values of a stationary time series // J. of time series analysis. 1989, vol. 10, no. 2. P. 149–169.

6. *Андерсон Т. В.* Введение в многомерный статистический анализ. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 500 с.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА

С. А. Дичковская

Многочисленные практически важные задачи, возникающие в различных областях науки, техники, экономики и производства сводятся к p -индексной ($p \geq 3$) аксиальной проблеме выбора (p -аксиальной ПВ)[1, 2], являющейся обобщением хорошо известной двухиндексной задачи о назначениях.

Для решения p -аксиальной ПВ могут быть использованы как точные, так и приближенные алгоритмы. Точные алгоритмы решения этой проблемы имеют экспоненциальную оценку трудоемкости, что и неудивительно, поскольку она (даже при $p = 3$) является NP-полной [3]. В связи с этим несомненный интерес представляет исследование и разработка простых и эффективных приближенных алгоритмов.

В [4] при некоторых дополнительных условиях, налагаемых на коэффициенты целевой функции, предложен полиномиальный алгоритм нахождения асимптотически оптимального решения p -аксиальной ПВ порядка n . Иначе говоря, установлено, что с ростом n доля p -аксиальных ПВ, в которых данный алгоритм строит асимптотически оптимальный план, среди всех задач стремится к 1.

Постановка 3-аксиальной ПВ порядка n заключается в минимизации целевой функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} x_{ijk}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ijk} = 0 \text{ или } 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$