

Далее, очевидно

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{1}{m} \|\Delta_n\| \leq \frac{1}{m} \left[\frac{(M-m)^2}{M^2 + 6mM + m^2} \right]^n \|\Delta_0\|.$$

Покажем, что оценка одного шага итерационного процесса (14) лучше оценки двух шагов итерационного процесса (7). Действительно, итерационный процесс (7) приводит к неравенству ([2], с.109)

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{1}{m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n \|\Delta_0\|.$$

Сравним

$$\left[\frac{(M-m)^2}{M^2 + 6mM + m^2} \right] < \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Итерационный процесс с минимальными невязками // Математический сборник. т.31(73).1952. №2. с. 315–334.
2. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др., Приближенное решение операторных уравнений / М.:Наука, 1969. с. 456.

ОБ ОДНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ИНВАРИАНТЕ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. Ю. Трубников

Среди всех функциональных операторов можно выделить операторы вида

$$Au(x) = \sum_{k=1}^m a_k(x)u(\alpha_k(x)), \quad (1)$$

где u – функция из заданного пространства $F(X)$ функций на множестве X , $\alpha_k : X \rightarrow X$ – заданные отображения, a_k – заданные функции.

Класс операторов, представимых в виде (1), весьма широк и его отдельные представители связаны с задачами из различных областей математики и ее приложений. Среди таких областей можно указать, кроме классической теории функциональных уравнений, теорию дифференциально-функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом, ряд

вопросов общей теории операторных алгебр и теории динамических систем, спектральную теорию автоморфизмов банаховых алгебр и другие вопросы.

Данная работа посвящается исследованию спектрального радиуса $r(B)$ оператора B вида

$$Bu(k) = \frac{a(k)}{2}[u(k-1) + u(k+1)], \quad (2)$$

действующего в пространстве l_p двусторонних последовательностей, где $a = (\dots, a(-1), a(0), a(1), a(2), \dots, a(k), \dots)$ – заданная числовая последовательность из l_p .

Известно, что существует выпуклый функционал $\tau(\nu)$ на пространстве Λ_α эмпирических мер на множестве ${}^\infty = \cup\{\pm\infty\}$ такой, что

$$\ln r(B) = \max_{\nu \in \Lambda_\alpha} \left\{ \int \ln |a(k)| d\nu - \tau(\nu) \right\}. \quad (3)$$

Таким образом, задача исследования спектрального радиуса исходного оператора заключается в вычислении функционала $\tau(\nu)$.

Рассмотрим случайное блуждание точки $0 \in \mathbb{Z}$: на каждом шаге с вероятностью $1/2$ точка совершает шаг на 1 вправо или влево. Пусть $\omega = (0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ есть траектория точки после n шагов, Ω_n – множество всех траекторий после n шагов. Множество траекторий описывается условием $|\xi_{k+1} - \xi_k| = 1$. Каждая траектория ω порождает эмпирическую меру на:

$$\mu_\omega(m) = \frac{1}{n} |\{k : \xi_k = m\}|, \quad (4)$$

– среднее время пребывания траектории в точке m . Пусть μ – произвольная нормированная мера, W_μ – окрестность этой меры. Обозначим через $\nu(\mu, n, W_\mu)$ количество траекторий из Ω_n , порождающих меры из W_μ .

Определение. Типичностью меры μ относительно случайного блуждания назовем величину

$$t(\mu) = \inf_{W_\mu} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \ln \nu(\mu, n, W_\mu) \right\}. \quad (5)$$

Теорема. Функционал $\tau(\mu)$ из формулы (3), типичность $t(\mu)$ и функционал $g(\mu) \equiv 1$ являются линейно зависимыми функциями переменной μ , т.е. существуют такие действительные α и β , что

$$\tau(\mu) = \alpha t(\mu) + \beta. \quad (6)$$

Рассмотрим пример: пусть отображение $a(k)$ имеет вид

$$a(k) = \begin{cases} a_k, & k \in \{-1, 0, 1\}, \\ 0, & k \notin \{-1, 0, 1\}. \end{cases} \quad (7)$$

Это значит, что любая эмпирическая мера порождается двумя числами p и q , такими, что $p + q = 1/2$. В этом случае имеем

$$t(\mu) = \inf_{W\mu} \overline{\lim}_{2n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2n} \ln C_{2n}^{[pn]} \right\} = \frac{1}{2} (-p \ln p - q \ln q), \quad (8)$$

а логарифм спектрального радиуса (полученного из независимых соображений) равен

$$\ln r(B) = \frac{1}{2} \ln [|a_0| (|a_{-1}| + |a_1|)] + \ln \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Представим правую часть (3) в виде $\max_{p \leq 1/2} f(p)$, где функция

$$f(p) = p \ln |a_{-1}| + \frac{1}{2} \ln |a_0| + \left(\frac{1}{2} - p\right) \ln |a_1| - \alpha \left[\frac{1}{2} (-p \ln p - q \ln q) \right] - \beta,$$

достигает своего максимума при $p = \frac{1}{2} \frac{|a_{-1}|}{|a_{-1}| + |a_1|}$ и совпадает с $\ln r(B)$ в

выражении (8) при $\alpha = -2$, $\beta = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$, т.е.

$$\tau(\mu) = -2t(\mu) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}.$$

Литература

1. Антонец А. Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. / Мн.: Университетское. 1988. с. 232.