

После подстановки функции (5) в первое уравнение системы (3) найдем

$$c_k = \frac{\gamma^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(\gamma-1) \cdots (\gamma^k - 1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Выполняя условие $y'(0) = V$, получим

$$A = \frac{b^2 gm(\gamma-1) - bmV}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(\gamma-1) \cdots (\gamma^k - 1)}}. \quad (7)$$

Легко убедиться, что ряды в равенствах (6), (7) сходятся абсолютно и что знаменатель в (7) отличен от нуля. Таким образом, формулы (5)–(7) дают решение первого уравнения системы (3). Заметим, что решение второго уравнения (3) с увеличением k становится весьма громоздким, поэтому находить его целесообразно в численном виде. Поэтому разработана программа на ЭВМ для численных расчетов, определяющая форму пролета в различные моменты времени и траекторию движения груза M при различных значениях параметров. Анализируя результаты, получили, в частности, что при увеличении отношения массы верхнего груза к массе нижнего груза прогиб увеличивается, при увеличении параметра натяжения – прогиб уменьшается.

Эта задача имеет практическое значение [2], т.к. моделирует движение транспортного модуля по гибкому пролету.

Литература

1. Савчук В. П., Савенков В. А., Вярвильская О. Н. Колебания транспортной линии при движении потока грузов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. №2. С.54.
2. Юницкий А. Э. Струнные транспортные системы на Земле и в космосе. Гомель: ИнфоТрибо, 1995.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК

И. Ю. Трубников

В настоящей работе предлагается и исследуется итерационный процесс, являющийся прямым обобщением метода минимальных невязок. Исходной работой, посвященной итерационному процессу с минималь-

ными невязками, является статья М. А. Красносельского и С. Г. Крейна [1]. В этой работе рассматривалось уравнение

$$Bx = b, \quad (1)$$

где $B: H \rightarrow H$ – положительно определенный самосопряженный линейный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H , – заданный, а x – искомый векторы.

Пусть x_0 – некоторое приближение к исходному решению x_* уравнения (1), для которого невязка $\Delta_0 = Bx_0 - b$. Будем искать первое приближение x_1 в виде

$$x_1 = x_0 + c_1 \Delta_0, \quad (2)$$

где c_1 подбирается так, чтобы невязка $\Delta_1 = Bx_1 - b$ имела минимальную длину. Подставляя (2) в (3) получим

$$\Delta_1 = B(x_0 + c_1 \Delta_0) - b = Bx_0 - b + c_1 B\Delta_0 = \Delta_0 + c_1 B\Delta_0,$$

откуда

$$\|\Delta_1\|^2 = (\Delta_0 + c_1 B\Delta_0, \Delta_0 + c_1 B\Delta_0) = \|\Delta_0\|^2 + 2c_1 (B\Delta_0, \Delta_0) + c_1^2 \|B\Delta_0\|^2, \quad (3)$$

Приравнивая производную

$$\frac{d\|\Delta_1\|^2}{dc_1} = 2(B\Delta_0, \Delta_0) + 2c_1 (B\Delta_0, B\Delta_0)$$

к нулю, найдем c_1 , при котором $\|\Delta_1\|$ принимает наименьшее значение

$$\tilde{c}_1 = -\frac{(B\Delta_0, \Delta_0)}{(B\Delta_0, B\Delta_0)}, \quad (4)$$

Отметим, что в силу положительной определенности оператора B , коэффициент c_1 отличен от нуля. Таким образом получаем формулу

$$x_1 = x_0 - \frac{(B\Delta_0, \Delta_0)}{(B\Delta_0, B\Delta_0)} \Delta_0. \quad (5)$$

При этом невязка Δ_1 выразится равенством

$$\Delta_1 = \Delta_0 - \frac{(B\Delta_0, \Delta_0)}{(B\Delta_0, B\Delta_0)} B\Delta_0. \quad (6)$$

Если обозначить невязку для x_n через $\Delta_n = Bx_n - b$, то для определения x_{n+1} будем иметь формулу

$$x_{n+1} = x_n + c_{n+1} \Delta_n, \quad (7)$$

где

$$\tilde{n}_{n+1} = -\frac{(B\Delta_n, \Delta_n)}{(B\Delta_n, B\Delta_n)}. \quad (8)$$

Опишем один шаг итерационного процесса, являющегося обобщением метода минимальных невязок. Будем искать первое приближение x_1 в виде

$$x_1 = x_0 + c_1\Delta_0 + c_2B\Delta_0 + \dots + c_mB^{m-1}\Delta_0, \quad (9)$$

чтобы невязка $\Delta_1 = Bx_1 - b$ имела минимальную длину. Тогда

$$Bx_1 - b = \Delta_0 + \sum_{i=1}^m c_i B^i \Delta_0, \quad (10)$$

и, положив $c_0 = 1$, получаем

$$\|\Delta_1\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^m c_i B^i \Delta_0 \right\|^2 = \left(\sum_{i=0}^m c_i B^i \Delta_0, \sum_{i=0}^m c_i B^i \Delta_0 \right), \quad (11)$$

т.е. $\|\Delta_1\|^2$ является квадратичной функцией переменных $c_1, c_2, \dots, c_m$. Приравнявая частные производные

$$\frac{\partial \|\Delta_1\|^2}{\partial c_k} = (B^k \Delta_0, \sum_{i=0}^m c_i B^i \Delta_0) + \left(\sum_{i=0}^m c_i B^i \Delta_0, B^k \Delta_0 \right) = 2 \sum_{i=0}^m c_i (B^i \Delta_0, B^k \Delta_0),$$

к нулю, получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^m c_i (B^i \Delta_0, B^k \Delta_0) = -(\Delta_0, B^k \Delta_0). \quad (12)$$

Определитель системы (12) является определителем Грама системы векторов $y_i = B^i \Delta_0, (1 \leq i \leq m)$ и, следовательно, равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $y_i, (1 \leq i \leq m)$ являются линейно зависимыми. Если векторы y_i образуют линейно независимую систему векторов, то система (12) имеет единственное решение. Если же они линейно зависимы, но Δ_0 не принадлежит подпространству, образованному этими векторами, то в качестве вектора $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ можно брать произвольное решение этой системы. Если $\Delta_0 \in L(y_1, y_2, \dots, y_m)$, то $\|\Delta_1\| = 0$, и, следовательно

$$x_* = x_0 + c_1^* \Delta_0 + c_2^* B \Delta_0 + \dots + c_m^* B^{m-1} \Delta_0.$$

Сформулируем результат о скорости сходимости процесса при $m=2$. Далее будем предполагать, что спектр оператора B расположен на отрезке $[m, M]$ ($0 < m < M$). В этом частном случае система уравнений (12) примет вид

$$\begin{cases} c_1(B\Delta_n, \Delta_n) + c_2(B^2\Delta_n, \Delta_n) = -(\Delta_n, \Delta_n) \\ c_1(B\Delta_n, B\Delta_n) + c_2(B^2\Delta_n, B\Delta_n) = -(\Delta_n, B\Delta_n). \end{cases} \quad (13)$$

Теорема. Пусть на каждом шаге итерационного процесса

$$x_{n+1} = x_n + c_1(n)\Delta_n + c_2(n)B\Delta_n, \quad (14)$$

векторы Δ_n и $B\Delta_n$ линейно независимы. Тогда последовательные приближения, определяемые равенством (13), сходятся к решению x_* уравнения (1). Скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{1}{m} \left[\frac{(M-m)^2}{M^2 + 6mM + m^2} \right]^n \|\Delta_0\|. \quad (15)$$

Доказательство. Из равенства (14) получаем, что

$$\|\Delta_{n+1}\| \leq \|\Delta_n + c_1 B\Delta_n + c_2 B^2\Delta_n\| \quad (16)$$

при любых c_1 и c_2 . Пусть c_1^* и c_2^* являются коэффициентами экстремального (в чебышевской норме) полинома на отрезке $[m, M]$, т.е. ([2], с.98) полинома

$$R_2(\lambda; m, M) = \frac{T_2\left(\frac{2\lambda - M - m}{M - m}\right)}{T_2\left(-\frac{M + m}{M - m}\right)}, \quad (17)$$

где $T_2 = 2t^2 - 1$ — «обычный» полином Чебышева.

Так как ([2], с.98)

$$\max_{m \leq \lambda \leq M} |R_2(\lambda; m, M)| = \frac{1}{T_2\left(-\frac{M + m}{M - m}\right)} = \frac{(M - m)^2}{M^2 + 6mM + m^2},$$

то из неравенства (16) следует:

$$\begin{aligned} \|\Delta_{n+1}\| &\leq \|\Delta_n + c_1^* B\Delta_n + c_2^* B^2\Delta_n\| \leq \|I + c_1^* B + c_2^* B^2\| \|\Delta_n\| \\ &\leq \frac{(M - m)^2}{M^2 + 6mM + m^2} \|\Delta_n\|. \end{aligned}$$

Далее, очевидно

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{1}{m} \|\Delta_n\| \leq \frac{1}{m} \left[\frac{(M-m)^2}{M^2 + 6mM + m^2} \right]^n \|\Delta_0\|.$$

Покажем, что оценка одного шага итерационного процесса (14) лучше оценки двух шагов итерационного процесса (7). Действительно, итерационный процесс (7) приводит к неравенству ([2], с.109)

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{1}{m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n \|\Delta_0\|.$$

Сравним

$$\left[\frac{(M-m)^2}{M^2 + 6mM + m^2} \right] < \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Итерационный процесс с минимальными невязками // Математический сборник. т.31(73).1952. №2. с. 315–334.
2. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др., Приближенное решение операторных уравнений / М.:Наука, 1969. с. 456.

ОБ ОДНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ИНВАРИАНТЕ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. Ю. Трубников

Среди всех функциональных операторов можно выделить операторы вида

$$Au(x) = \sum_{k=1}^m a_k(x)u(\alpha_k(x)), \quad (1)$$

где u – функция из заданного пространства $F(X)$ функций на множестве X , $\alpha_k : X \rightarrow X$ – заданные отображения, a_k – заданные функции.

Класс операторов, представимых в виде (1), весьма широк и его отдельные представители связаны с задачами из различных областей математики и ее приложений. Среди таких областей можно указать, кроме классической теории функциональных уравнений, теорию дифференциально-функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом, ряд