ДВИЖЕНИЕ ГРУЗА С ПОДРЕССОРЕННОЙ МАССОЙ ПО ГИБКОМУ НАТЯНУТОМУ ПРОЛЕТУ

О. В. Титюра

Рассматривается движение по гибкому натянутому пролету длины l груза массы m, к которому присоединена пружина жесткости c с закрепленным на ее конце грузом массой M. Нагрузка массы m, скорость которой имеет постоянную горизонтальную составляющую V, при $t=0$ вступает на горизонтальную невозмущенную струну длины l с неподвижно закрепленными концами. В отличие от нагрузки струну будем считать разгруженной от силы тяжести [1].

Получена математическая модель задачи:

$$\begin{cases} M\ddot{Y} = -c(Y-y), \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \dfrac{f}{\rho}\delta(x-Vt), \\ m\ddot{y} = -g(m+M) - f + c(Y-y), \end{cases}$$

где $y(t)$ – прогиб струны под нагрузкой, $Y(t)$ – отклонение груза массы M от положения равновесия, f – интенсивность внешних сил, действующих на груз со стороны струны, $a=\sqrt{T/\rho}$ – скорость распространения возмущения струны, $\delta(x)$ – δ-функция Дирака, T – натяжение струны, g – ускорение свободного падения, ρ – линейная плотность струны, $U(x,t)$ – функция, доставляющая величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент времени t.

Исходя из физической постановки задачи, краевые и начальные условия следующие:

$$U\big|_{x=0}=0, \qquad U\big|_{t=0}=0, \qquad Y\big|_{t=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial Y}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

$$U\big|_{x=l}=0, \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \qquad y\big|_{t=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

Следует отметить, что рассматриваются только малые колебания струны при $1<a\le 3$. Для нахождения функции $y(t)$ в безразмерных величинах будем считать $0\le t\le 1$.

Задача сводится к нахождению решения интегрального уравнения вида:

$$y(t)=\frac{2}{a\pi}\int_0^t f(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin ak\pi(t-\tau)\sin k\pi\tau\sin k\pi t d\tau\,. \qquad (1)$$

Поскольку ядро уравнения (1) кусочно-постоянно в рассматриваемой области, то интеграл в правой части уравнения (1) вычисляется, и уравнение принимает вид:

$$y(t)+bm(y'(t)-y'(\gamma t))=$$
$$=\begin{cases} bgt(\gamma-1), & 0\le t\le t_1,\\ \dfrac{4bg}{a^2-1}(t-1)+bm\left(y'\left(\dfrac{t-t_1}{\gamma}\right)-y'(t-t_1)\right), & t_1\le t\le 1,\end{cases} \qquad (2)$$

где $\gamma=\dfrac{a-1}{a+1}$, $t_1=\dfrac{2}{a+1}$, $b=\dfrac{M}{2a\rho l}$.

Таким образом, для определения функции $y(t)$ получено дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.

Уравнение (2) можно представить в виде

$$\begin{cases} bm(y_1'(t)-y_1'(\gamma t))+y_1(t)=bgt(\gamma-1), \quad 0\le t\le t_1,\\ bmy_k'(t)+y_k(t)=\dfrac{4bg}{a^2-1}(t-1)+bm(y_1'(\gamma t)-y_1'(t-t_1)+\\ \qquad +y_{k-1}'((t-t_1)/\gamma), \quad t_{k-1}\le t\le t_k, \quad k=2,3,...,\end{cases} \qquad (3) \qquad (7)$$

где $y(t)=\begin{cases} y_1(t), & 0\le t\le t_1,\\ y_k(t), & t_{k-1}\le t\le t_k, \quad k=2,3,...,\end{cases}$ $t_k=\gamma t_{k-1}+t_1$.

После определения $y_1(t)$ функции $y_k(t)$ найдутся последовательно. По физическому смыслу задачи $y(t)$ и $y'(t)$ непрерывные функции, поэтому

$$y_{k+1}(t_k)=y_k(t_k), \quad y_{k+1}'(t_k)=y_k'(t_k), \quad k=1,2,\dots\,. \qquad (4)$$

Найдем теперь функцию $y_1(t)$. Общее решение первого уравнения системы (3) будем искать в виде

$$y_1(t)=bgt(\gamma-1)+A\varphi(t), \qquad (5)$$

где

$$\varphi(t)=e^{-\frac{t}{mb}}+c_1e^{-\frac{t}{mb}\gamma}+c_2e^{-\frac{t}{mb}\gamma^2}+\dots\,. \qquad (6)$$

После подстановки функции (5) в первое уравнение системы (3) найдем

$$c_k = \frac{\gamma^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(\gamma-1)\cdots(\gamma^k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Выполняя условие $y'(0) = V$, получим

$$A = \frac{b^2 gm(\gamma-1) - bmV}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(\gamma-1)\cdots(\gamma^k-1)}}. \tag{7}$$

Легко убедиться, что ряды в равенствах (6), (7) сходятся абсолютно и что знаменатель в (7) отличен от нуля. Таким образом, формулы (5)–(7) дают решение первого уравнения системы (3). Заметим, что решение второго уравнения (3) с увеличением k становится весьма громоздким, поэтому находить его целесообразно в численном виде. Поэтому разработана программа на ЭВМ для численных расчетов, определяющая форму пролета в различные моменты времени и траекторию движения груза M при различных значениях параметров. Анализируя результаты, получили, в частности, что при увеличении отношения массы верхнего груза к массе нижнего груза прогиб увеличивается, при увеличении параметра натяжения – прогиб уменьшается.

Эта задача имеет практическое значение [2], т.к. моделирует движение транспортного модуля по гибкому пролету.

Литература

1. *Савчук В. П., Савенков В. А., Вярьвильская О. Н.* Колебания транспортной линии при движении потока нагрузок // Весці АН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. №2. С.54.
2. *Юницкий А. Э.* Струнные транспортные системы на Земле и в космосе. Гомель: ИнфоТрибо, 1995.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК

И. Ю. Трубников

В настоящей работе предлагается и исследуется итерационный процесс, являющийся прямым обобщением метода минимальных невязок. Исходной работой, посвященной итерационному процессу с минималь-