$$
\begin{aligned}
&h_0 \frac{\partial \sigma_{-2}}{\partial R_1} + \frac{h_0}{R_1} \sigma_2 - \tau_{-1}^{np} + \tau_{-2}^{np} \cos \alpha = 0, \\
&h_0 \frac{\partial \sigma_{-1}}{\partial R_2} + \frac{h_0}{R_2} \sigma_1 - \tau_{-2}^{np} + \tau_{-1}^{np} \cos \alpha = 0.
\end{aligned} \qquad (5)
$$

Здесь τ_{-1}^{np} и τ_{-2}^{np} определяются равенствами (2).

Условия $d\alpha_1 < 0$ и $d\alpha_2 > 0$ справедливы для рассматриваемой зоны выреза. В других зонах знаки $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ могут быть другими. Всего существует четыре разных варианта. Однако, как легко убедиться, это не влияет на вывод уравнений (4) и (5).

Литература

1. *Колганов А. В., Сахоненко В. М.* Способ получения отверстий в композиционном материале. // Авт. св. № 1445978, опубл. 23.12.88, бюл. №47.
2. *Колганов В. И., Колганов А. В., Сахоненко В. М., Сахоненко С.В.* Метод исследования напряженного деформированного состояния неотвержденных композиционно-волокнистых материалов. // Межвуз.сб. «Неразрушающий контроль и диагностика окружающей среды, материалов и промышленных изделий». СПб. 2001. № 4. С. 125–134.
3. *Колганов В. И., Колганов А. В., Сахоненко В. М., Сахоненко С. В.* Особенности построения методики эксперимента для нахождения коэффициентов внутреннего трения препрегов. // XVI Российская научно-техническая конф. «Неразрушающий контроль и диагностика»: Материалы конф. СПб. 9–12 сент. 2002. С. 1–8.

ДРОБНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО АДАМАРУ И ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО ЛЕЙБНИЦА

А. А. Титюра

Пусть $D_{a+,\mu}^{\alpha} g$ – дробная производная типа Адамара порядка $\alpha > 0$ на конечном отрезке $[a,b]$ $(0 < a < b < \infty)$, определяемая для действительных μ формулой [1]:

$$
(D_{a+,\mu}^{\alpha} g)(x) = x^{-\mu} \delta^n x^{\mu} (J_{a+,\mu}^{n-\alpha} g)(x), \ \delta = x \frac{d}{dx}, \ n = [\alpha] + 1,
$$

где $[\alpha]$ – целая часть α, $J_{a+,\mu}^{n-\alpha} g$ – дробный интеграл типа Адамара порядка $n - \alpha$. Такой дробный интеграл $J_{a+,\mu}^{\alpha} g$ порядка $\alpha > 0$ определяется формулой [1]:

$$(J^{\alpha}_{a+,\mu}g)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}g(t)\frac{dt}{t}\quad (x>a,\mu\in R),$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция [2, § 1.1].

Имеют место следующие две теоремы о возможности почленного дробного интегрирования и дифференцирования по Адамару функциональных рядов.

Теорема 1. Если ряд $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$, $f_n(x)\in C([a,b])$, сходится равномерно на $[a,b]$, то допустимо его почленное дробное интегрирование по Адамару:

$$\left(J^{\alpha}_{a+,\mu}\sum_{n=0}^{\infty}f_n\right)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(J^{\alpha}_{a+,\mu}f_n)(x),\quad \alpha>0,\quad a<x<b,$$

причем ряд справа сходится также равномерно на $[a,b]$.

Теорема 2. Пусть существуют дробные производные типа Адамара $D^{\alpha}_{a+,\mu}f_n$ при каждом $n=0,1,2,\ldots$, а ряды $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}D^{\alpha}_{a+,\mu}f_n$ сходятся равномерно на любом подынтервале $[a+\varepsilon,b]$, $\varepsilon>0$. Тогда первый ряд допускает почленное дробное дифференцирование по Адамару:

$$\left(D^{\alpha}_{a+,\mu}\sum_{n=0}^{\infty}f_n\right)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(D^{\alpha}_{a+,\mu}f_n)(x),\quad \alpha>0,\quad a<x<b.$$

Будем пользоваться обозначениями

$$D^{\alpha}_{a+,\mu}g=J^{-\alpha}_{a+,\mu}g=(J^{\alpha}_{a+,\mu})^{-1}g,\quad \alpha>0,$$

т.е. $D^{\alpha}_{a+,\mu}$ при $\alpha<0$ означает дробный интеграл типа Адамара $J^{-\alpha}_{a+,\mu}$.

Напомним, см. [2, § 1.3], что биномиальные коэффициенты определяются по формуле

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{(-1)^{k-1}\alpha\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}. \tag{1}$$

В частности, при целых $\alpha=m$, $m=1,2,\ldots$, имеют место равенства

$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$ при $m\ge n$ и $\binom{m}{n}=0$ при $0\le m<n$.

В случае произвольных (комплексных) β и α, $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, полагают

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} = \frac{\sin(\beta-\alpha)\pi}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)}. \tag{2}$$

Обобщим классическое правило Лейбница

$$(fg)^{(m)} = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} f_n^{\ (m-n)} g^{(n)}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

на дифференцирование и интегрирование дробного порядка по Адамару в виде бесконечного ряда.

Следующая теорема дает распространение формулы Лейбница (3) на дробные значения α в двух формах.

Теорема 3. Пусть $f(x)$, $g(x)$ имеют разложение вида:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k [t^{\mu} h(t)]}{k!} x^{\mu} \left(\ln \frac{x}{t} \right)^k, \quad a < t < b, \quad \delta = x \frac{d}{dx}.$$

Тогда

$$D^{\alpha}_{a+,\mu}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D^{\alpha-k}_{a+,\mu} f)\, g^{(k)}, \quad \alpha \in R,$$

$$D^{\alpha}_{a+,\mu}(fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{\alpha}{k+\beta} (D^{\alpha-\beta-k}_{a+,\mu} f)\, (D^{\beta+k}_{a+,\mu} g),$$

где биномиальный коэффициент $\binom{\alpha}{k}$ определяется формулой (1), а $\binom{\alpha}{k+\beta}$ – формулой (2); $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ при нецелом β

Литература

1. *Kilbas A. A.* Hadamard-type fractional calculus // J. Korean Math. Soc. Vol. 38. 2001. N 1. P. 1191–1204.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника, 1987. 688 с.