ГЕОМЕТРИЯ ИНВАРИАНТНЫХ *F*-СТРУКТУР НА ФЛАГОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А. С. Сакович

Многообразия флагов представляют собой интересный объект для изучения ввиду того, что они как однородные Φ-пространства, которые могут быть порождены автоморфизмами различных порядков, заведомо обладают большим запасом канонических f-структур. Первая часть данной работы содержит необходимые сведения о f-структурах и об их основных классах, выделяемых в обобщенной эрмитовой геометрии. Вторая часть посвящена многообразию ориентированных флагов, а также автоморфизмам, которые порождают это однородное Φ-пространство. В заключительной части приводятся результаты исследования f-структур на многообразиях ориентированных флагов $SO(n)/SO(2)\times SO(n-3)$ и $SO(n)/SO(2)\times SO(2)\times SO(n-5)$ на предмет их принадлежности основным классам обобщенной эрмитовой геометрии.

f-структуры и их классы

Пусть M – связное гладкое многоообразие, $\mathrm{X}(M)$ – алгебра Ли векторных полей на M со скобкой Ли $[\cdot,\cdot]$. Напомним, что аффинорной структурой на многообразии M называется гладкое тензорное поле типа (1,1). К аффинорным структурам классического типа относят структуру почти произведения ($P^2=1$), почти комплексную структуру ($J^2=-1$), а также f-структуру ($f^3+f=0$).

Как известно, почти эрмитовой структурой на многообразии M называется пара тензоров (J,g), где J – почти комплексная структура, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ – (псевдо-)риманова метрика, причем $\langle JX,JY\rangle=\langle X,Y\rangle$ для любых векторных полей X и Y на M. В работе [1] были указаны 16 классов почти эрмитовых структур. Перечислим некоторые наиболее важные из них:

- эрмитовы структуры (H): $\nabla_X(J)Y-\nabla_{JX}(J)JY=0$,
- келеровы структуры (K): $\nabla J=0$,
- приближенно келеровы структуры (NK): $\nabla_X(J)X=0$,
- G_1-структуры (G_1): $\nabla_X(J)X-\nabla_{JX}(J)(JX)=0$.

Здесь ∇ – связность Леви-Чивита (псевдо-)риманова многообразия M.

Следствием развития эрмитовой геометрии явилось появление в 80-х годах концепции обобщенной эрмитовой геометрии. Центральным объектом здесь является обобщение почти комплексной структуры – f-структура. Классы обобщенной эрмитовой геометрии выделяются на основании свойств так называемой Q-алгебры – модуля $\mathfrak{X}(M)$ с операцией $*$, определенной по формуле $X * Y = T(X,Y)$, где T – тензор типа (2,1), называемый композиционным (см. [2]). В [2] также было показано, что на метрическом f-многообразии такой тензор всегда существует, причем его можно задать в явном виде:

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f(\nabla_{fX}(f)(fY) - \nabla_{f^2X}(f)(f^2Y)).$$

Антикоммутативность Q-алгебры ($T(X,X)=0$) выделяет обобщенные G_1-структуры, а ее абелевость ($T(X,Y)=0$) – обобщенные эрмитовы структуры. Для метрической f-структуры их называют G_1f- и Hf-структурами соответственно. Очевидно, что в частном случае $f = J$ эти понятия дают в точности определения G_1-структуры и эрмитовой структуры. Важный класс составляют также приближенно келеровы f-структуры (NKf-структуры), определяемые соотношением $\nabla_{fX}(f)fX = 0$ [3]. Нетрудно убедиться в том, что имеют место следующие включения: $Hf \subset G_1f$, $NKf \subset G_1f$.

Перейдем к инвариантным f-структурам на однородных пространствах. Как известно, однородные регулярные Φ-пространства обладают большим запасом канонических аффинорных структур, в том числе и f-структур [4]. Если G/H – однородное Φ-пространство порядка $n \geq 3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\theta = d\Phi_e|_{\mathfrak{m}}$ и

$$u = \begin{cases} k, & n = 2k+1, \\ k-1, & n = 2k, \end{cases}$$

то все нетривиальные канонические f-структуры на G/H могут быть заданы операторами

$$f = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{u} \left(\sum_{j=1}^{u} \xi_j \sin \frac{2\pi mj}{n} \right) \left(\theta^m - \theta^{n-m} \right),$$

где $\xi_j \in \{1,0,-1\}$, $j = 1,2,...,u$, $\sum_{j=1}^{u} \xi_j^2 \neq 0$.

Напомним, что $(G/H, g)$ называется естественно редуктивным, если для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ выполняется $g([X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z) = g(X, [Y,Z]_{\mathfrak{m}})$, где индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию на $\mathfrak{m}$ относительно редуктивного разложения. Если G – полупростая группа Ли и G/H является регулярным Φ-пространством, то на нем существует естественно редуктивная псевдориманова метрика, порождаемая формой Киллинга [5].

В [3] и [6] приведены теоремы, которые помогают устанавливать принадлежность f-структур на естественно редуктивных однородных Φ-пространствах основным классам обобщенной эрмитовой геометрии. Отметим важный частный случай.

Соответствующие канонические метрические f-структуры на естественно редуктивных однородных Φ-пространствах G/H порядков 4 и 5 являются как NKf -, так и Hf -структурами.

Многообразие ориентированных флагов

В теории линейных пространств флагом называется строго возрастающая последовательность подпространств $L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_n$ некоторого векторного пространства L [7]. Очевидно, что по всякому базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ векторного пространства L можно построить флаг длины n, положив $L_0 = \{0\}$, $L_i =$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ $(i = 1,2,...,n)$.

Флаг $L_{i_1} \subset L_{i_2} \subset ... \subset L_{i_n}$ будем называть ориентированным, если для любых двух базисов пространства L_{i_j} $(j = 1,2,...k)$ матрица перехода от первого ко второму имеет положительный определитель. Легко проверить, что множество ориентированных флагов вида $L_1 \subset L_3 \subset ... \subset L_{2k+1} \subset L_n$ векторного пространства L размерности n (нижний индекс обозначает размерность подпространства) с действием специальной ортогональной группы изоморфно

$SO(n)/\underbrace{SO(2) \times ... \times SO(2)}_{k} \times SO(n-2k)$.

Это многообразие является однородным Φ-пространством, причем оно может быть порождено автоморфизмами различных порядков вида

$$\Phi : SO(n) \to SO(n) : A \to BAB^{-1},$$

где $B = \mathrm{diag}\{1, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_k, -1, ..., -1\}$,

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi i}{m} & \sin\frac{2\pi i}{m} \\ -\sin\frac{2\pi i}{m} & \cos\frac{2\pi i}{m} \end{pmatrix} \ (i = 1,...,k,\ m \geq 2k-2,\ m - \text{четное}).$$

Легко видеть, что $\Phi^m = id$.

Для случаев $k = 1$ и 2 доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Для однородного Φ-пространства порядка 6 $SO(n)/SO(2)\times SO(n-3)$ все канонические f-структуры являются Hf-структурами и все, кроме $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta^4)$, принадлежат классу NKf.

Теорема 2. Для однородного Φ-пространства порядка 6 $SO(n)/SO(2)\times SO(2)\times SO(n-5)$, имеем:

$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^5)$ принадлежит классу Hf, но не принадлежит классу NKf,

$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta^4)$ не принадлежит классам Hf и NKf,

$f(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-\theta^2 + \theta^4 \mp \theta \pm \theta^5)$ являются как приближенно-келеровыми, так и Hf-структурами.

Литература

1. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1980. V. 123. № 4. P. 35–58.
2. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 25–71.
3. *Балащенко В. В.* Однородные приближенно келеровы f-многообразия // Доклады РАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 439–441.
4. *Балащенко В. В., Степанов Н. А.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Мат.сборник. 1995. Т. 186. № 11. С. 3–34.
5. *Степанов Н. А.* Основные факты теории φ-пространств // Изв. ВУЗов. Математика. 1967. №3. С. 88–95.
6. *Балащенко В. В.* Однородные эрмитовы f-многообразия // УМН. 2001. Т. 56, вып.3. С. 159–160.
7. *Кострикин И. А., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. / М.: Наука, 1986. 304 с.